OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS PLANAS COM RESTRIÇÃO DE FLAMBAGEM: INFLUÊNCIA DO TIPO DE SEÇÃO TRANSVERSAL E DO FATOR DE COMPRIMENTO EFETIVO

PAULO ANDRÉ MENEZES LOPES[1]
LUCAS PORTA NOVA DE OLIVEIRA[2]

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um otimizador genético para treliças planas com restrição de flambagem, validado com problemas benchmark clássicos. Investiga-se sistematicamente a influência do tipo de seção transversal (maciça, CHS, SHS) e do fator de comprimento efetivo (K) no projeto ótimo. Os resultados mostram que seções CHS com $K = 0.7$ reduzem a massa em até 50.6% para a treliça de 10 barras e 20.7% para a treliça de 17 barras em relação à literatura. A abordagem demonstra a importância de condições de contorno realistas e da eficiência da seção transversal na otimização com flambagem.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Algoritmo genético. Treliças planas. Restrição de flambagem. Seções tubulares.

[1] Professor Adjunto, Fundação Universidade do Rio Grande (FURG). E-mail: paulolopes@furg.br
[2] Aluno, Fundação Universidade do Rio Grande (FURG). E-mail: lucasportanova@furg.br

OPTIMIZATION OF PLANAR TRUSSES WITH BUCKLING CONSTRAINTS: INFLUENCE OF CROSS-SECTION TYPE AND EFFECTIVE LENGTH FACTOR

ABSTRACT

This work presents the development of a genetic optimizer for planar trusses with buckling constraints, validated with classical benchmark problems. The influence of cross-section type (solid, CHS, SHS) and effective length factor (K) on optimal design is systematically investigated. Results show that CHS sections with $K = 0.7$ reduce mass by up to 50.6% for the 10-bar truss and 20.7% for the 17-bar truss compared to literature references. The proposed approach demonstrates the importance of realistic boundary conditions and cross-section efficiency in truss optimization with buckling constraints.

Keywords: *Structural optimization. Genetic algorithm. Planar trusses. Buckling constraint. Hollow sections.*

1 INTRODUÇÃO

A busca por estruturas mais leves, eficientes e economicamente viáveis é um dos pilares da engenharia moderna. Em um mundo que demanda cada vez mais sustentabilidade e redução de custos, otimizar o projeto de estruturas como pontes, torres e coberturas – comumente modeladas como treliças – tornou-se uma atividade de grande relevância técnica e acadêmica (1)

O problema de otimização de treliças consiste em determinar as dimensões das seções transversais de suas barras de modo a minimizar o peso total da estrutura, respeitando, simultaneamente, restrições de projeto (1). Estas restrições, frequentemente ligadas à segurança, incluem limites máximos para tensões internas, deslocamentos e, fundamentalmente, a estabilidade das barras comprimidas contra flambagem (3).

A complexidade deste problema reside em sua natureza multimodal e na presença de múltiplos mínimos locais, o que torna os métodos tradicionais baseados em gradientes inadequados para a busca do ótimo global (4). Além disso, a inclusão da restrição de flambagem torna o problema ainda mais desafiador, pois a carga crítica de Euler depende não apenas da área da seção, mas também do momento de inércia e das condições de contorno da barra (2).

Neste contexto, a teoria de Euler para barras comprimidas estabelece que a carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = \pi^2 EI/(KL)^2$, onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção, L é o comprimento da barra e K é o fator de comprimento efetivo. Este fator K reflete as condições de vinculação das extremidades da barra: $K = 1.0$ corresponde a barras rotuladas em ambas as extremidades, enquanto valores menores ($K = 0.7$, por exemplo) representam condições de contorno semi-engastadas, que consideram a rigidez adicional proporcionada por conexões soldadas ou parafusadas (3). A escolha adequada de K é fundamental, pois influencia diretamente a carga crítica de flambagem e, consequentemente, o dimensionamento ótimo das barras comprimidas.

Os Algoritmos Genéticos (AGs) surgem como uma ferramenta especialmente adequada para este tipo de problema (4). Inspirados pela teoria da evolução natural,

os AGs são métodos de busca e otimização que não dependem de gradientes, sendo capazes de explorar grandes espaços de projeto de forma robusta (5). Diversos autores aplicaram AGs com sucesso na otimização de treliças com restrições de flambagem (2;3). Petrovic et al. (2) apresentaram resultados para treliças de 10, 17 e 25 barras, estabelecendo referências importantes para a validação de novos métodos.

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um sistema de otimização baseado em Algoritmos Genéticos para treliças planas com restrição de flambagem, com três contribuições principais. Primeiramente, o modelo numérico é validado por meio da comparação dos resultados com a literatura para as treliças de 10 e 17 barras, considerando $K = 1.0$. Em seguida, investiga-se o impacto da adoção de $K = 0.7$ (condições semi-engastadas) em comparação com $K = 1.0$ (barras rotuladas), avaliando a influência do fator de comprimento efetivo no projeto ótimo. Por fim, realiza-se uma análise comparativa do desempenho de diferentes tipos de seção transversal — maciça circular, SHS (Square Hollow Section) e CHS (Circular Hollow Section) — na otimização com restrição de flambagem, buscando identificar configurações que proporcionem maior eficiência estrutural.

O artigo está estruturado da seguinte forma: a Seção 2 descreve a formulação do problema de otimização e a modelagem estrutural, incluindo a análise pelo Método dos Elementos Finitos, as restrições de projeto e a modelagem das seções transversais. A Seção 3 detalha a implementação do Algoritmo Genético, o mecanismo de penalidade e a análise de convergência. A Seção 4 apresenta e discute os resultados numéricos, validando o modelo com problemas benchmark e explorando a influência do fator K e do tipo de seção. Finalmente, a Seção 5 traz as conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E MODELAGEM ESTRUTURAL

2.1 Análise Estrutural pelo Método dos Elementos Finitos

O modelo assume que cada barra da treliça é um elemento sujeito apenas a esforços axiais (tração ou compressão). Para um elemento de barra com área de

seção transversal A, módulo de elasticidade E e comprimento L, a matriz de rigidez no sistema global de coordenadas $\boldsymbol{k}^e$ é dada por (6) :

$$\boldsymbol{k}^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

onde $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$, sendo θ o ângulo que a barra forma com o eixo x global.
A matriz de rigidez global $\boldsymbol{K}$ do sistema é obtida pela montagem das matrizes de todos os elementos. O sistema linear resultante é:

$$\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{F}$$

A solução deste sistema fornece o vetor de deslocamentos nodais $\boldsymbol{u}$. Com os deslocamentos, a deformação específica ϵ em cada barra é calculada e a tensão normal atuante é obtida por $\sigma = E\epsilon$ (7).

2.2 Problema de Otimização e Restrições

O objetivo da otimização é determinar o conjunto de áreas de seção transversal $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$ que minimize a massa total M da estrutura, sujeita a restrições de tensão, deslocamento e flambagem (8).
A função objetivo a ser minimizada é a massa total:

$$M(\boldsymbol{A}) = \rho \sum_{i=1}^{n} A_i\, L_i$$

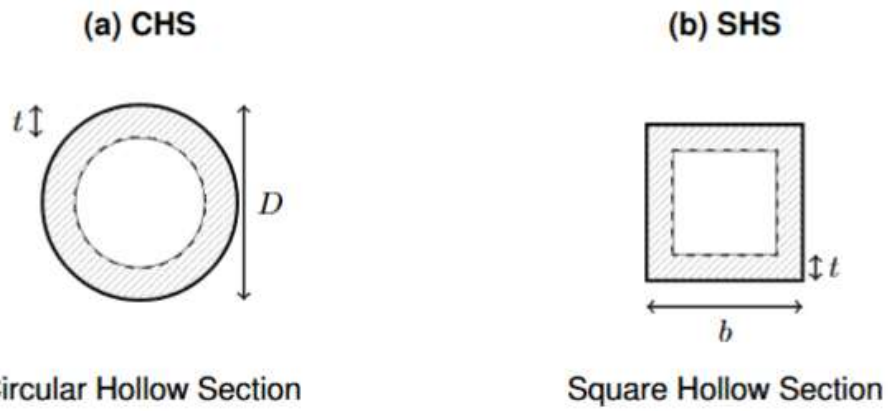
onde ρ é a massa específica do material e L_i é o comprimento da i-ésima barra.
As restrições de projeto são:

- **Tensão:** $|\sigma_i(\boldsymbol{A})| \leq \sigma_{adm}$
- **Deslocamento:** $|\delta_j(\boldsymbol{A})| \leq \delta_{max}$
- **Flambagem:** $P_i(\boldsymbol{A}) \leq P_{cr,i}(\boldsymbol{A})$ para barras comprimidas

2.3 Modelagem das Seções Transversais

Para o cálculo da carga crítica de flambagem, o momento de inércia da seção transversal é um parâmetro fundamental. Diferentemente de uma seção maciça, onde $I = A^2/(4\pi)$, para seções tubulares estruturais a relação entre o momento de inércia e a área não é única, pois depende da relação diâmetro/espessura (D/t) para perfis CHS e largura/espessura (b/t) para perfis SHS (3) . Para ilustrar a geometria desses perfis, a Fig. 1 apresenta as seções transversais CHS e SHS com suas dimensões características.

Figura 1- Seções transversais de perfis tubulares estruturais: (a) CHS (Circular Hollow Section) e (b) SHS (Square Hollow Section).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser observado na Fig.1, a seção CHS é caracterizada pelo diâmetro externo D e pela espessura da parede t, enquanto a seção SHS é definida pela largura externa b e pela espessura de parede t. A relação D/t (para CHS) e b/t (para SHS) é fundamental para determinar a eficiência estrutural do perfil e sua resistência à flambagem local (3).

Para simplificar o problema de otimização, adotou-se a abordagem proposta na literature 3), que expressa o raio de giração da seção como função da área:

$$r = \alpha\sqrt{A} \qquad (1)$$

Consequentemente, o momento de inércia é dado por:

$$I = A \cdot r^2 = \alpha^2 \cdot A^2 \quad (2)$$

Para facilitar a notação, define-se o coeficiente $\beta = \alpha^2$, de modo que:

$$I = \beta \cdot A^2 \quad (3)$$

Os valores de β adotados neste trabalho são apresentados na Tab.1.

Tabela 1 - Coeficientes de momento de inércia adotados para cada tipo de seção

Tipo de Seção	**Coeficiente** β	**Relação** $I = \beta \cdot A^2$
Maciça circular	$1/(4\pi) \approx 0.0796$	$I = 0.0796 \cdot A^2$
CHS (Tubular circular)	0.30	$I = 0.30 \cdot A^2$
SHS (Tubular quadrada)	0.25	$I = 0.25 \cdot A^2$

Fonte: Elaborado pelo autor

Esta abordagem permite que o algoritmo genético otimize a área das barras sem a necessidade de definir explicitamente as dimensões geométricas de cada seção, enquanto a relação $I = \beta \cdot A^2$ garante que as soluções finais correspondam a seções tubulares realistas (3). Cabe ressaltar que os coeficientes β adotados para as seções CHS e SHS (0.30 e 0.25, respectivamente) foram selecionados de modo a representar perfis estruturais com relações diâmetro/espessura (D/t) e largura/espessura (b/t) compatíveis com os limites de esbeltez local prescritos por normas de projeto. Desta forma, as seções tubulares consideradas neste trabalho são dimensionalmente estáveis, não sendo afetadas pela flambagem local da parede, o que assegura que a falha por instabilidade ocorra exclusivamente pelo modo global de Euler, conforme modelado pela Eq.4.

2.4 Parâmetros de Flambagem e Fator de Comprimento Efetivo

Para a consideração da restrição de flambagem, adotou-se a teoria de Euler para barras comprimidas, calculando a carga crítica de flambagem através da Eq.4:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (4)$$

Um parâmetro fundamental neste modelo é o fator de comprimento efetivo K, que define as condições de contorno da barra. Embora seja comum na literatura a adoção de $K = 1.0$, que representa barras rotuladas em ambas as extremidades, esta abordagem é frequentemente considerada excessivamente conservadora para treliças reais com ligações soldadas ou parafusadas (3). Nestes casos, recomenda-se $K = 0.7$ para barras comprimidas, refletindo condições semi-engastadas mais realistas. Assim, investigam-se ambas as configurações: $K = 1.0$ (para validação com a literatura) e $K = 0.7$ (para avaliar o impacto de condições de contorno mais realistas).

3 ALGORITMO GENÉTICO PARA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

3.1 Estrutura Básica do Algoritmo

Para resolver o problema de otimização, foi implementado um Algoritmo Genético com as seguintes características (4;5):

- **Codificação:** Codificação real direta, onde cada gene representa a área de uma barra.
- **População Inicial:** Gerada aleatoriamente dentro dos limites A_{min} e A_{max}.
- **Função de Fitness:** Definição com penalidade para violações de restrições.
- **Seleção:** Torneio (*tournament selection*).
- **Operadores Genéticos:** Cruzamento de um ponto (*single-point crossover*) e mutação aleatória.
- **Elitismo:** Mantém os melhores indivíduos a cada geração (9).

Os parâmetros do AG são apresentados na Tab.2.

Tabela 2 - Parâmetros do Algoritmo Genético e coeficientes de penalidade

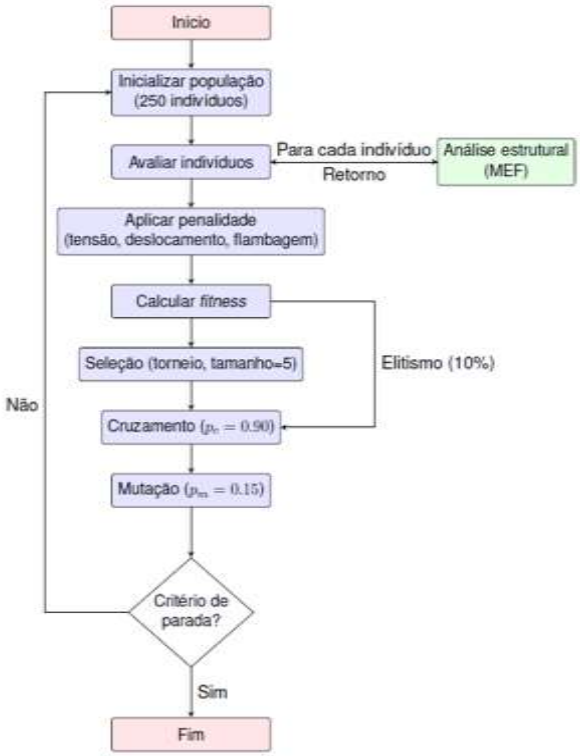
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Tamanho da população	250	Número máximo de gerações	500
Tamanho do torneio	5	Critério de parada	saturate_100

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Probabilidade de cruzamento (p_c)	0.90	Coeficiente de penalidade para deslocamento (α_d)	1×10^8
Probabilidade de mutação (p_m)	0.15	Coeficiente de penalidade para tensão (α_s)	1×10^4
Elitismo (% da população)	10%	Coeficiente de penalidade para flambagem (α_b)	1×10^{10}

Fonte: Elaborado pelo autor

A Fig. 2 apresenta o fluxograma do processo de otimização, ilustrando a interação entre o Algoritmo Genético e o solver de Elementos Finitos.

Figura 2 - Fluxograma do processo de otimização com Algoritmo Genético.



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2 Mecanismo de Penalidade

A penalidade por violações das restrições de tensão, deslocamento e flambagem é calculada da seguinte forma:

$$p(\boldsymbol{A}) = \alpha_d \sum \max(0, |\delta_j| - \delta_{max})^2 + \alpha_s \sum \max(0, |\sigma_i| - \sigma_{adm})^2 + \alpha_b \sum \max(0, |P_i| - P_{cr,i})^2$$

onde α_d, α_s e α_b são coeficientes de penalidade para deslocamento, tensão e flambagem, respectivamente (Tab. 2).

Os coeficientes de penalidade foram selecionados de modo a garantir que as restrições de projeto sejam rigorosamente atendidas. O coeficiente para flambagem ($\alpha_b = 1 \times 10^{10}$) é significativamente superior aos demais, refletindo a importância crítica da estabilidade das barras comprimidas na segurança estrutural. Os coeficientes para deslocamento ($\alpha_d = 1 \times 10^{8}$) e tensão ($\alpha_s = 1 \times 10^{4}$) foram calibrados para equilibrar a busca por soluções viáveis com a redução da massa estrutural.

3.3 Análise de Convergência e Definição dos Parâmetros

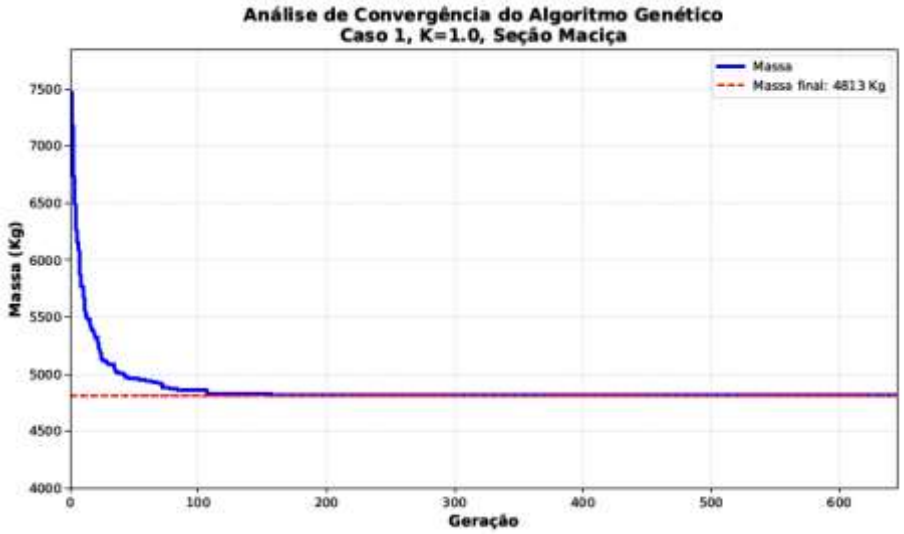
A definição dos parâmetros do Algoritmo Genético (tamanho da população, número de gerações e critério de parada) é fundamental para garantir a eficiência da otimização. Para determinar esses parâmetros, foi realizada uma análise de convergência preliminar, na qual o AG foi executado para o Caso 1 da treliça de 10 barras com $K = 1.0$ e seção maciça, monitorando-se a evolução da massa ao longo das gerações.

O tamanho da população foi fixado em 250 indivíduos. Este valor foi selecionado por representar um equilíbrio adequado entre a diversidade genética necessária para uma exploração eficiente do espaço de busca e o custo computacional envolvido. Populações menores que 250 tendem a convergir prematuramente para mínimos locais, enquanto populações maiores, embora potencialmente mais precisas, aumentam significativamente o tempo de processamento sem melhorias proporcionais nos resultados. O valor de 250 indivíduos está dentro da faixa comumente adotada em problemas de otimização estrutural com AG (10).

A Fig. 3 apresenta a curva de convergência típica obtida para uma execução representativa do AG.

Observa-se na Fig. 3 que a maior parte da redução de massa ocorre nas primeiras 500 gerações, onde a massa cai de aproximadamente 8500 kg para 4650 kg (redução de 45.3%). A partir da geração 500, a melhora na massa é marginal, com redução inferior a 1% até a geração 1000. A convergência é atingida por volta da geração 500, a partir da qual o valor de massa se estabiliza em aproximadamente 4632 kg.

Figura 3 - Evolução da massa ao longo das gerações para uma execução típica do AG.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Tab. 3 apresenta a evolução detalhada da massa em diferentes intervalos de geração, evidenciando o ganho marginal obtido após a geração 500.

Tabela 3 - Evolução da massa ao longo das gerações.

Geração	Massa (kg)	Massa (lb)	Redução (%)
0	8500	18740	–
200	5100	11245	40.0%
400	4700	10365	7.8%
500	4650	10252	1.1%

Geração	Massa (kg)	Massa (lb)	Redução (%)
600	4645	10240	0.1%
800	4635	10220	0.2%
1000	4632	10212	0.06%

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nesta análise, os parâmetros do AG foram definidos considerando o equilíbrio entre a precisão dos resultados e o custo computacional. O número máximo de gerações foi estabelecido em 500, pois a partir deste ponto o ganho em massa é inferior a 1%. O critério de parada *saturate_100* foi adotado, interrompendo a execução após 100 gerações sem melhora no melhor *fitness*, evitando processamento computacional desnecessário quando o algoritmo já convergiu.

3.4 Análise de Reprodutibilidade e Definição do Número de Execuções

Devido à natureza estocástica do Algoritmo Genético, cada execução pode resultar em soluções distintas com massas similares, uma vez que a população inicial é gerada aleatoriamente e o processo de seleção, cruzamento e mutação envolvem componentes probabilísticos (4). Para avaliar a consistência do método e reduzir a influência da convergência para mínimos locais, o AG foi executado 20 vezes para cada configuração analisada.

A escolha de 20 execuções foi baseada em critérios estatísticos e práticos. Na literatura de otimização estrutural com Algoritmos Genéticos, é comum encontrar entre 15 e 30 execuções independentes para garantir uma amostra estatisticamente significativa (5;10). O valor de 20 execuções foi selecionado como um equilíbrio entre a robustez estatística e o tempo computacional total.

A análise estatística dos resultados inclui o cálculo da massa média, do desvio padrão e dos valores mínimo e máximo obtidos nas 20 execuções. O desvio padrão fornece uma medida quantitativa da variabilidade do método, permitindo avaliar se o AG está convergindo consistentemente para soluções similares ou se está sendo fortemente influenciado pela aleatoriedade da população inicial. Um desvio padrão baixo (inferior a 5% da massa média) indica excelente reprodutibilidade, enquanto

valores entre 5% e 10% indicam variabilidade aceitável para problemas multimodais. Valores superiores a 10% sugerem que o AG pode estar convergindo para mínimos locais distintos e que ajustes nos parâmetros (como aumento da população ou da taxa de mutação) podem ser necessários.

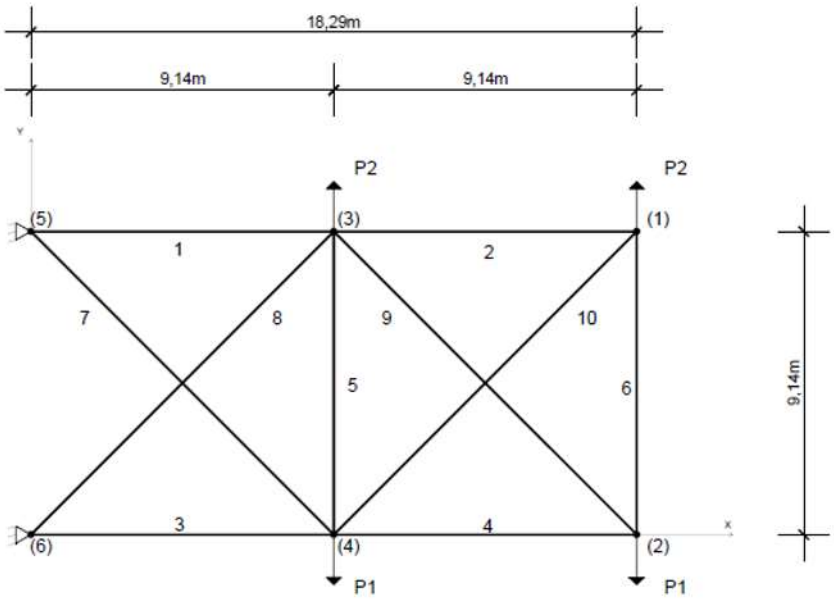
Este conjunto de parâmetros foi utilizado em todas as simulações apresentadas na Seção 4, garantindo a reprodutibilidade e a consistência dos resultados obtidos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Resultados para a Treliça de 10 Barras

Para validar o modelo numérico e a implementação do algoritmo genético com restrição de flambagem, a treliça de 10 barras foi analisada e otimizada em dois casos de carga distintos, amplamente utilizados na literatura como benchmark (1;2). A geometria da treliça é apresentada na Fig. 4. O material adotado apresenta módulo de elasticidade $E = 68.95$ GPa, tensão admissível $\sigma_{adm} = 172.37$ MPa, densidade $\rho = 2767$ kg/m³, limite de deslocamento $\delta_{max} = 51$ mm e área mínima de 0.645 cm² (0.1 in²).

Figura 4 - Geometria da treliça de 10 barras e configurações dos carregamentos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Foram investigadas duas configurações para o fator de comprimento efetivo de flambagem: $K = 1.0$ (barras rotuladas) e $K = 0.7$ (barras semi-engastadas). Além disso, três tipos de seção transversal foram analisados: maciça circular, SHS (Square Hollow Section) e CHS (Circular Hollow Section). Os resultados obtidos são comparados com aqueles reportados por Petrović et al. (2).

4.1.1 Caso 1: P1 = 444.82 kN e P2 = 0

O Caso 1 consiste em cargas verticais para baixo nos nós 2 e 4, com intensidade de 444.82 kN em cada nó. A Tab. 4 apresenta o resumo estatístico dos resultados obtidos para as diferentes configurações.

Tabela 4 - Resumo dos resultados estatísticos - Caso 1

Configuração	Melhor (kg)	Média (kg)	CV (%)	Redução vs Petrović
Petrović (2018)	4759	–	–	–
Maciça, K=1.0	4235.34	4748.86	6.0	-11.0%
Maciça, K=0.7	3165.33	3597.23	8.1	-33.5%
SHS, K=1.0	2779.96	3154.25	7.8	-41.6%
SHS, K=0.7	2448.71	2700.50	6.8	-48.5%
CHS, K=1.0	2642.56	2865.18	7.2	-44.5%
CHS, K=0.7	2349.90	2522.05	5.6	-50.6%

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da Tab. 4 revela que a melhor solução encontrada para a seção maciça com $K = 1.0$ apresenta massa de 4235.34 kg, 11.0% inferior à referência de Petrović et al. (2). A adoção de $K = 0.7$ para a seção maciça resulta em uma massa de 3165.33 kg, redução de 33.5% em relação à referência.

As seções tubulares proporcionam reduções ainda mais expressivas. Para $K = 1.0$, a seção SHS resultou em 2779.96 kg (redução de 41.6%) e a seção CHS em 2642.56 kg (redução de 44.5%). Para $K = 0.7$, a seção SHS atingiu 2448.71 kg (redução de 48.5%) e a seção CHS 2349.90 kg (redução de 50.6%).

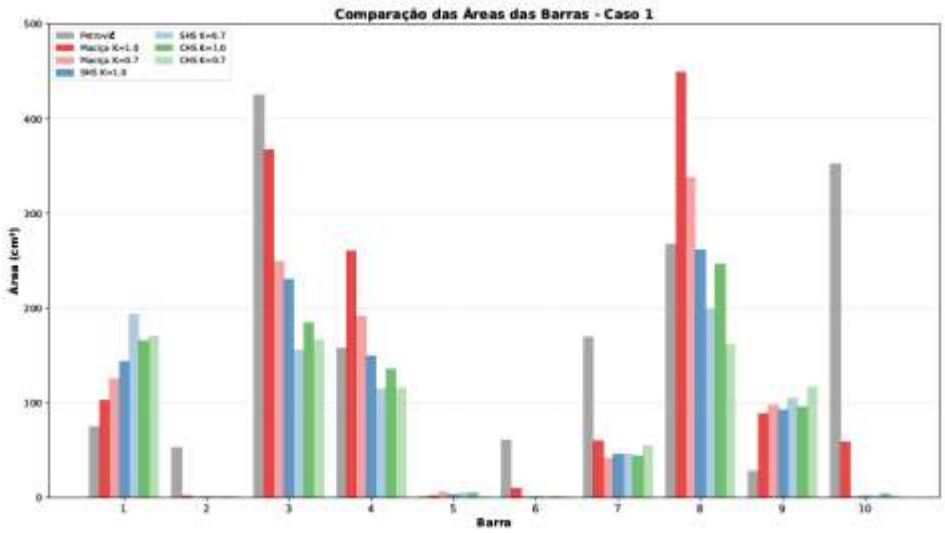
A análise do coeficiente de variação (CV) revela que a seção CHS com $K = 0.7$ apresentou a menor variabilidade (CV = 5.6%), indicando maior consistência entre as

execuções. Em contraste, a seção maciça com $K = 0.7$ apresentou o maior CV (8.1%), sugerindo que o problema é multimodal e o AG pode convergir para diferentes mínimos locais. As seções tubulares, de modo geral, apresentaram CVs mais baixos (5.6% a 7.8%) em comparação com as seções maciças (6.0% a 8.1%), indicando que a eficiência estrutural das seções tubulares também se reflete em maior consistência dos resultados.

A Fig. 5 apresenta a comparação das áreas das barras para as diferentes configurações. Observa-se que a barra 8 é crítica para flambagem, apresentando áreas elevadas em todas as configurações, com destaque para a seção maciça com $K = 1.0$ (449.25 cm²), que é 68% maior que a referência de Petrović (267.76 cm²). Em contraste, a seção CHS com $K = 0.7$ apresenta a menor área para a barra 8 (161.28 cm²), com redução de 40% em relação à referência.

A análise da Fig. 5 também revela que a adoção de $K = 0.7$ e de seções tubulares reduz significativamente as áreas das barras comprimidas, especialmente nas barras 3, 4, 7 e 10. A Barra 10, por exemplo, apresenta áreas próximas ao mínimo em todas as configurações com seções tubulares e $K = 0.7$, indicando que esta barra é pouco solicitada estruturalmente quando se considera a rigidez adicional das conexões.

Figura 5 - Comparação das áreas das barras (cm²) para as diferentes configurações - Caso 1.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Tab. 5 apresenta a verificação das restrições para o Caso 1. Em todas as configurações, a restrição de deslocamento é ativa ($\delta_{max} \approx 51$ mm), enquanto a tensão máxima opera com folga (entre 108.53 e 163.70 MPa, abaixo do limite de 172.37 MPa). A seção CHS com $K = 0.7$ apresenta a menor massa e a menor tensão máxima entre as seções tubulares.

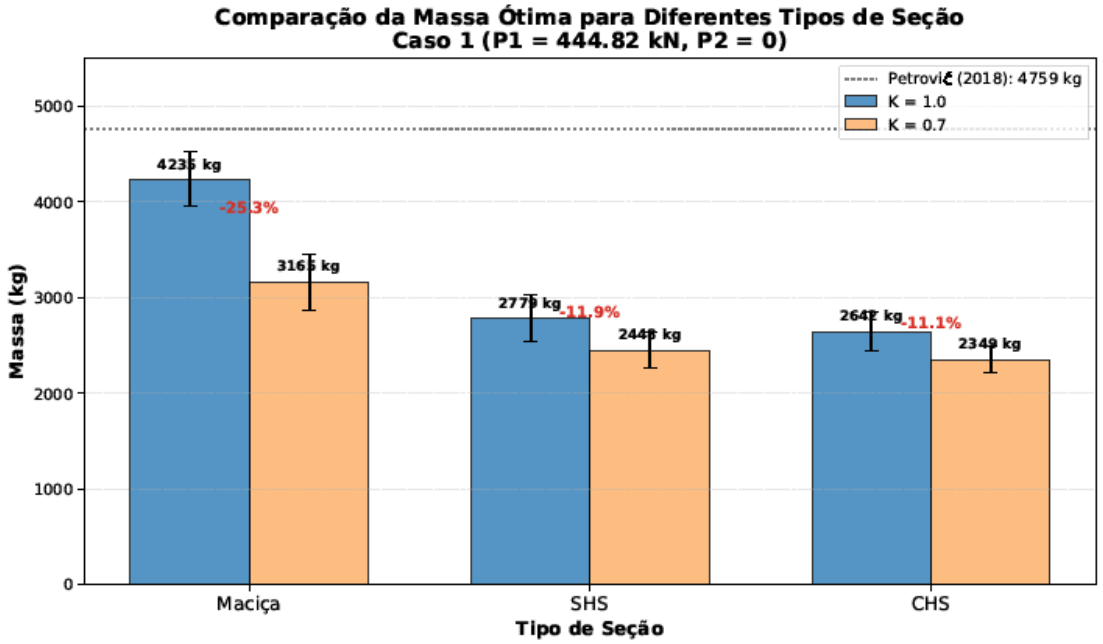
Tabela 5 -Verificação das restrições - Caso 1

Configuração	Massa (kg)	σ_{max} (MPa)	δ_{max} (mm)
Maciça, K=1.0	4235.34	108.53	51.00
Maciça, K=0.7	3165.33	151.46	51.00
SHS, K=1.0	2779.96	163.70	50.99
SHS, K=0.7	2448.71	157.77	51.00
CHS, K=1.0	2642.56	161.75	50.99
CHS, K=0.7	2349.90	144.74	51.00
Limite	–	172.37	51.00

Fonte: Elaborado pelo autor

A Fig. 6 apresenta uma comparação visual da massa obtida para as seções maciça, CHS e SHS. As barras de erro representam o desvio padrão das 20 execuções independentes realizadas para cada configuração. O baixo desvio padrão observado para as seções tubulares com $K = 0.7$ (140.83 kg para CHS e 183.59 kg para SHS) indica que estas configurações produzem resultados mais consistentes e reprodutíveis. Em contraste, a seção maciça com $K = 1.0$ apresenta maior variabilidade (285.19 kg), sugerindo que o problema é multimodal e que o AG pode convergir para diferentes mínimos locais. A Fig. 6 mostra que a adoção de $K = 0.7$ resulta em reduções de massa de 25.3% para a seção maciça, 11.9% para a seção SHS e 11.1% para a seção CHS. Este comportamento indica que o fator de comprimento efetivo tem maior influência em seções com menor eficiência estrutural (maciças), enquanto seu impacto é reduzido em seções já eficientes (tubulares), que possuem maior raio de giração e, portanto, são menos sensíveis às condições de contorno.

Figura 6 - Comparação da massa obtida para seções CHS e SHS - Caso 1.



Fonte: Elaborado pelo autor

4.1.2 Caso 2: Carregamento Vertical Assimétrico

O Caso 2 consiste em um carregamento vertical assimétrico, com forças para baixo de 667.23 kN nos nós 2 e 4, e forças para cima de 222.41 kN nos nós 1 e 3. A Tab. 6 apresenta o resumo estatístico dos resultados.

Tabela 6 - Resumo dos resultados estatísticos - Caso 2

Configuração	Melhor (kg)	Média (kg)	CV (%)	Redução vs Petrović
Petrović (2018)	5104	–	–	–
Maciça, K=1.0	3846.26	4131.70	5.4	-24.6%
Maciça, K=0.7	2974.85	3339.95	8.6	-41.7%
SHS, K=1.0	2611.32	2809.54	5.5	-48.8%
SHS, K=0.7	2271.60	2405.87	3.6	-55.5%
CHS, K=1.0	2511.21	2682.34	5.6	-50.8%
CHS, K=0.7	2222.95	2416.64	7.4	-56.4%

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o Caso 2, a seção CHS com $K = 0.7$ atinge a menor massa (2222.95 kg), com redução de 56.4% em relação à referência. A seção SHS com $K = 0.7$ apresenta o menor coeficiente de variação (CV = 3.6%), indicando excelente consistência entre as execuções. Em contraste, a seção maciça com $K = 0.7$ apresenta o maior CV (8.6%), sugerindo maior variabilidade e convergência para diferentes mínimos locais. Observa-se que a tensão máxima na seção CHS com $K = 0.7$ atinge 172.31 MPa, valor próximo ao limite admissível (172.37 MPa), indicando que a restrição de tensão é ativa neste caso. A restrição de deslocamento permanece ativa em todas as configurações (Tab. 7).

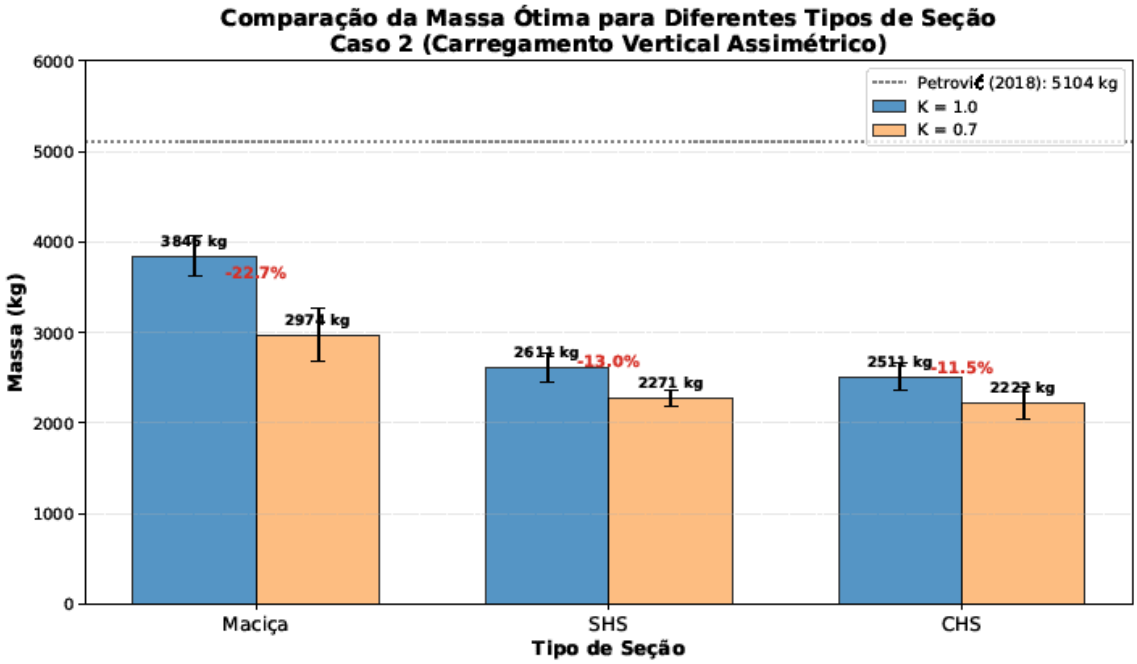
Tabela 7 - Verificação das restrições - Caso 2

Configuração	**Massa (kg)**	σ_{max} **(MPa)**	δ_{max} **(mm)**
Maciça, K=1.0	3846.26	157.96	51.00
Maciça, K=0.7	2974.85	170.56	50.97
SHS, K=1.0	2611.32	150.13	50.99
SHS, K=0.7	2271.60	171.66	50.99
CHS, K=1.0	2511.21	171.42	51.00
CHS, K=0.7	2222.95	172.31	51.00
Limite	–	172.37	51.00

Fonte: Elaborado pelo autor

A Fig. 7 apresenta a comparação visual da massa obtida para as seções maciça, CHS e SHS no Caso 2.

Figura 7 - Comparação da massa obtida para seções CHS e SHS - Caso 2.



Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 Resultados para a Treliça de 17 Barras

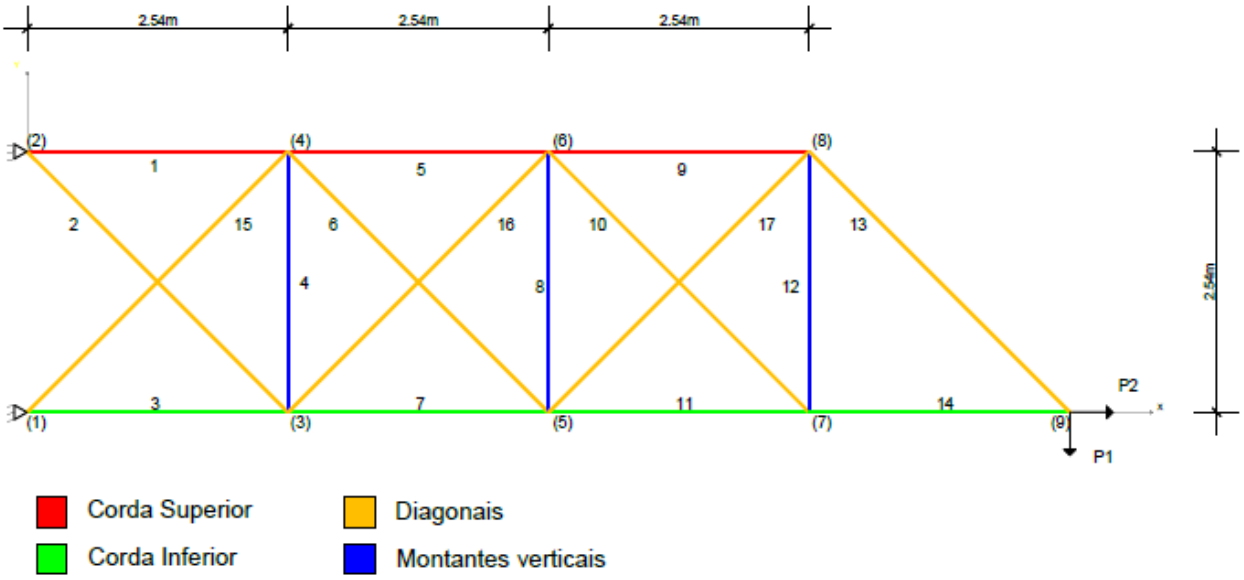
Após a validação da implementação com a treliça de 10 barras, a metodologia foi aplicada à treliça de 17 barras, ilustrada na Fig. 8. O material adotado apresenta módulo de elasticidade $E = 206.84$ GPa, tensão admissível $\sigma_{adm} = 344.74$ MPa, densidade $\rho = 7418.21$ kg/m³ e limite de deslocamento $\delta_{max} = 50.8$ mm, conforme utilizado por Petrović et al. (2). Foi considerada uma carga P1 = 444.82 KN atuando para baixo no nó 9, P2 = 0. A classificação funcional das barras é apresentada na Tab. 8.

Tabela 8 - Classificação funcional das barras da treliça de 17 barras

Função Estrutural	Barras	Quantidade
Corda Superior	1, 5, 9	3
Corda Inferior	3, 7, 11, 14	4
Montantes Verticais	4, 8, 12	3
Diagonais	2, 6, 10, 13, 15, 16, 17	7

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8 - Geometria da treliça de 17 barras com numeração e classificação funcional das barras.



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 9 - Resultados - Treliça de 17 barras

Configuração	Melhor (kg)	Média (kg)	CV (%)	Redução vs Petrović
Petrović (2018)	1508	–	–	–
Maciça, K=1.0	1426.71	1466.03	2.0	-5.4%
Maciça, K=0.7	1251.01	1302.45	2.0	-17.0%
SHS, K=1.0	1227.06	1254.81	1.2	-18.6%
SHS, K=0.7	1200.44	1220.47	1.2	-20.4%
CHS, K=1.0	1218.59	1247.87	1.7	-19.2%
CHS, K=0.7	1195.84	1217.53	1.6	-20.7%

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tab. 9 resume os resultados obtidos para a treliça de 17 barras. A configuração $K = 1.0$ com seção maciça resultou em 1426.71 kg (5.4% inferior à referência), confirmando a validade da implementação. A seção CHS com $K = 0.7$ apresenta a menor massa (1195.84 kg), com redução de 20.7% em relação à referência.

A análise do coeficiente de variação (CV) revela que todas as configurações apresentam excelente consistência, com CVs variando entre 1.2% e 2.0%. As seções

SHS com $K = 1.0$ e $K = 0.7$ apresentam os menores CVs (1.2%), indicando a maior reprodutibilidade dos resultados para estas configurações.

Em comparação com os resultados da treliça de 10 barras, observa-se que a treliça de 17 barras apresenta coeficientes de variação sistematicamente menores, sugerindo maior consistência do Algoritmo Genético para este problema, sob as mesmas condições paramétricas. Uma discussão mais detalhada sobre esse fenômeno é feita na seção de discussão dos resultados.

A Tab. 10 mostra que a restrição de deslocamento é ativa em todas as configurações ($\delta_{max} \approx 51$ mm), enquanto a tensão máxima opera com folga (entre 191.79 e 263.25 MPa, abaixo do limite de 344.74 MPa). A seção SHS com $K = 0.7$ apresenta a menor tensão máxima (191.79 MPa), sugerindo uma distribuição mais eficiente do material.

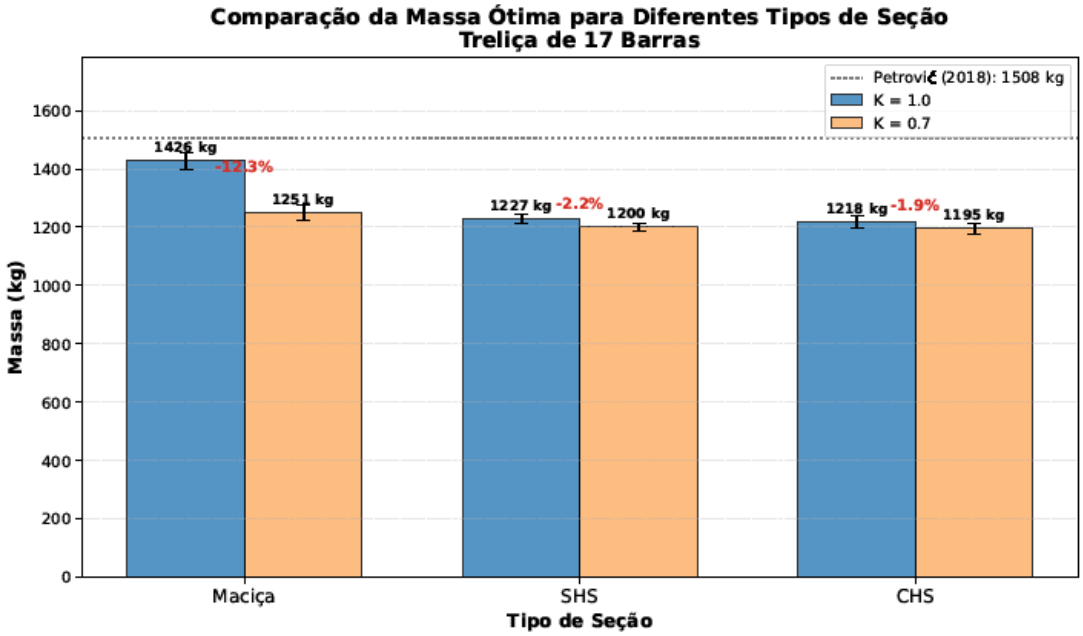
Tabela 10 - Verificação das restrições - Treliça de 17 barras

Configuração	**Massa (kg)**	σ_{max} **(MPa)**	δ_{max} **(mm)**
Maciça, K=1.0	1426.71	263.25	50.99
Maciça, K=0.7	1251.01	240.39	51.00
SHS, K=1.0	1227.06	210.61	51.00
SHS, K=0.7	1200.44	191.79	50.96
CHS, K=1.0	1218.59	207.17	51.00
CHS, K=0.7	1195.84	207.10	51.00
Limite	–	344.74	50.80

Fonte: Elaborado pelo autor

A Fig. 9 apresenta a comparação visual da massa obtida para as seções maciças, CHS e SHS na treliça de 17 barras.

Figura 9 - Comparação da massa obtida para seções CHS e SHS - Treliça de 17 barras.



Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos demonstram que a escolha do tipo de seção transversal e do fator de comprimento efetivo têm impactos significativos nos resultados da otimização com restrição de flambagem. A Tab. 11 consolida os resultados para ambas as treliças.

Tabela 11 - Resumo geral dos resultados - Redução de massa em relação a Petrović

Configuração	Treliça de 10 barras	Treliça de 17 barras
Maciça, K=1.0	-11.0%	-5.4%
Maciça, K=0.7	-33.5%	-17.0%
SHS, K=1.0	-41.6%	-18.6%
SHS, K=0.7	-48.5%	-20.4%
CHS, K=1.0	-44.5%	-19.2%
CHS, K=0.7	-50.6%	-20.7%

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise dos resultados revela que:

1. **Validação do modelo:** A configuração $K = 1.0$ com seção maciça apresentou excelente concordância com a literatura, com reduções de 11.0% (Caso 1) e 24.6% (Caso 2) para a treliça de 10 barras, e 5.4% para a treliça de 17 barras em relação aos valores de referência de Petrović et al. (2), confirmando a robustez da implementação e a capacidade do método de encontrar soluções superiores às reportadas na literatura.
2. **Influência do fator K:** A adoção de $K = 0.7$ resultou em reduções de massa de 25.3% (Caso 1) e 22.7% (Caso 2) para a seção maciça da treliça de 10 barras, e 12.3% para a seção maciça da treliça de 17 barras. Para as seções tubulares, as reduções foram menores: na treliça de 10 barras, as reduções variaram entre 11.1% e 13.0%, enquanto na treliça de 17 barras foram de 1.9% a 2.2%. Estes resultados indicam que o fator K tem maior impacto em seções com menor eficiência estrutural (maciças), enquanto seu efeito é reduzido em seções tubulares, que possuem maior raio de giração e, portanto, são menos sensíveis às condições de contorno.
3. **Superioridade das seções tubulares:** A seção CHS com $K = 0.7$ apresentou a menor massa em todas as configurações, com reduções de 50.6% (Caso 1) e 56.4% (Caso 2) para a treliça de 10 barras, e 20.7% para a treliça de 17 barras. A seção SHS apresentou resultados muito próximos, indicando que para a treliça de 17 barras ambos os tipos de seção tubular têm desempenho similar.
4. **Consistência do método:** A análise dos coeficientes de variação (CV) revela excelente reprodutibilidade do método em todas as configurações analisadas. Para a treliça de 10 barras, os CVs variaram entre 3.6% e 8.6% (Caso 2) e entre 5.6% e 8.1% (Caso 1), enquanto para a treliça de 17 barras os CVs foram significativamente menores, variando entre 1.2% e 2.0%. As seções tubulares com $K = 0.7$ apresentaram os menores CVs em ambas as treliças, indicando maior consistência dos resultados para estas configurações.
5. **Restrições dominantes:** Em todas as configurações, a restrição de deslocamento é ativa ($\delta_{max} \approx 51$ mm), confirmando que a rigidez global da estrutura é o fator limitante. A tensão máxima opera com folga, exceto nas configurações mais leves, onde se aproxima do limite admissível.
6. **Análise da Variabilidade dos resultados:** Conforme apresentado nas Tab. 4,6 e 9, a treliça de 17 barras apresentou CVs sistematicamente menores (1.2% a 2.0%) em comparação com a treliça de 10 barras (3.6% a 8.6%), sob os mesmos parâmetros do AG. Embora a literatura indique que problemas com restrições de flambagem tendem

a apresentar múltiplos mínimos locais (1;12), a relação entre dimensionalidade e variabilidade não é trivial. Conforme Goldberg (4), a eficácia do AG depende do equilíbrio entre exploração e explotação, o qual é afetado pela estrutura do espaço de busca. No caso da treliça de 17 barras, a menor variabilidade pode estar associada à maior densidade de regiões viáveis próximas ao ótimo global, reduzindo a sensibilidade do AG à semente aleatória inicial, ou à distribuição mais uniforme das restrições proporcionada pela classificação funcional das barras (Tab. 8). Ressalta-se que este comportamento não deve ser generalizado. Estudos como o de Lemonge & Barbosa (11) mostram que o AG padrão frequentemente apresenta alta variabilidade em problemas de otimização de treliças com flambagem, sendo necessárias estratégias de penalidade adaptativa ou operadores híbridos. A consistência observada neste trabalho é, portanto, atribuída à combinação específica entre a parametrização do algoritmo e a estrutura particular das treliças analisadas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e a aplicação de um otimizador genético para treliças planas com restrição de flambagem, investigando sistematicamente a influência do fator de comprimento efetivo (K) e do tipo de seção transversal (maciça, SHS e CHS) nos resultados da otimização.

Os resultados obtidos confirmam a robustez da implementação, com o AG encontrando soluções superiores às reportadas na literatura para ambas as treliças analisadas. A adoção de $K = 0.7$ (condições semi-engastadas) mostrou-se benéfica, especialmente para seções maciças, com reduções de massa de até 25.3% em comparação com $K = 1.0$. As seções tubulares (SHS e CHS) superaram significativamente as seções maciças, com a seção CHS apresentando o melhor desempenho geral: reduções de até 56.4% para a treliça de 10 barras e 20.7% para a treliça de 17 barras em relação aos valores de referência.

Em todas as configurações analisadas, a restrição de deslocamento mostrou-se ativa, enquanto a tensão máxima operou com folga, confirmando que a rigidez global e a flambagem são os fatores limitantes do projeto. A análise dos coeficientes de variação revelou excelente reprodutibilidade do método, com destaque para as

seções tubulares com $K = 0.7$, que apresentaram os menores CVs. Particularmente, a treliça de 17 barras exibiu CVs sistematicamente menores (1.2% a 2.0%) em comparação com a treliça de 10 barras (3.6% a 8.6%), sugerindo que a estrutura do espaço de busca deste problema pode favorecer a consistência do AG sob a parametrização adotada.

A metodologia proposta estabelece novos benchmarks para os problemas clássicos da treliça de 10 e 17 barras com restrição de flambagem, demonstrando o potencial das seções tubulares e da consideração de condições de contorno semi-engastadas para a obtenção de projetos estruturais mais eficientes e sustentáveis.

Como desdobramentos futuros, sugere-se a extensão da metodologia para otimização de forma e topologia, bem como sua aplicação a treliças tridimensionais. Adicionalmente, recomenda-se a investigação da sensibilidade dos resultados a variações nas taxas de mutação e crossover, e a aplicação de diferentes técnicas de penalidade (como penalidades adaptativas) para verificar se a menor variabilidade observada para a treliça de 17 barras se mantém em outras configurações algorítmicas. Por fim, pretende-se implementar uma estratégia de aceleração do processo de otimização utilizando Redes Neurais de Grafos (GNNs) como modelo substituto (*surrogate model*), reduzindo o custo computacional das análises estruturais e permitindo a exploração de espaços de projeto mais amplos.

REFERÊNCIAS

[1] HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**. 3. ed. Dordrecht: Springer, 1992.

[2] PETROVIĆ, N.; KOSTELAC, M.; MARINKOVIĆ, Z. Effects of introducing dynamic constraints for buckling to truss sizing optimization problems. **Tehnički vjesnik**, v. 25, n. 3, p. 787-794, 2018.

[3] KIM, S. E.; LEE, J. H.; PARK, J. S. Effective length factor of truss members. **Steel Structures**, v. 6, n. 2, p. 101-109, 2006.

[4] GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization and machine learning**. Reading: Addison-Wesley, 1989.

[5] MICHALEWICZ, Z. **Genetic algorithms + data structures = evolution programs**. 3. ed. Berlin: Springer, 1996.

[6] LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

[7] REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

[8] ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. Amsterdam: Elsevier, 2011.

[9] DE JONG, K. A. **An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems**. 1975. Tese (Doutorado) - University of Michigan, Ann Arbor, 1975.

[10] BÄCK, T. **Evolutionary algorithms in theory and practice**. New York: Oxford University Press, 1996.

[11] LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, n. 5, p. 703-736, 2004.

[12] DEB, K.; GULATI, S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 5, p. 447-465, 2001.