

**CONTROLE LQG E  $H_\infty$  VIA PRINCÍPIO DE RECUPERAÇÃO DA MALHA OBJETIVO**  
**APLICADOS AO CONTROLE DE POSIÇÃO**

SILVA, D.L.F.; AMORIM, G.F. & PAULA, C.F.

**Resumo:** Este artigo apresenta o projeto de um controlador LQGe de um controlador  $H_\infty$  via princípio de recuperação da malha objetivo (Loop Transfer Recovery – LTR) aplicados ao módulo de controle de posição angular do laboratório LCPIC da Universidade Federal de Itajubá e visa estabelecer uma comparação entre estes dois métodos de controle robusto multivariável quando aplicados à mesma planta e a partir dos mesmos parâmetros de projeto.

**Palavras-Chave:** Controle de posição, Servomecanismo, Controle LQG/LTR, Controle  $H_\infty$ /LTR, princípio de recuperação da malha objetivo.

## **I – INTRODUÇÃO**

Executar uma ação de controle significa modificar a dinâmica da planta para que ela obedeça a requisitos mínimos de desempenho e rejeite ruídos de medição e distúrbios do sistema. Neste trabalho foram projetados e simulados dois controladores robustos para o módulo de controle de posição do laboratório LCPIC da Universidade Federal de Itajubá por métodos distintos: LQG/LTR e  $H_{\infty}$ /LTR. Além das simulações foram realizados ensaios práticos na planta com o intuito de comparar as duas técnicas em um sistema real.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na primeira seção o tema é introduzido e o trabalho esquematizado; na seção II é descrito o sistema a ser controlado; nas seções III e IV são projetados, simulados e analisados os controladores LQG/LTR e  $H_{\infty}$ /LTR, respectivamente, e na seção V são apresentadas as conclusões a partir dos resultados experimentais obtidos.

## **II – O MODELO DO SERVOMECANISMO**

### *II.1 Descrição da planta*

A planta utilizada no trabalho é um modelo reduzido de um sistema de posicionamento angular. Um servo-potenciômetro alimentado com uma fonte de tensão fixa regulada funciona como transdutor de deslocamento angular da planta. Todo deslocamento no eixo deste potenciômetro varia de forma proporcional à tensão do cursor que varia entre 0 e +5[V].

Um servo-motor de ímã permanente com corrente contínua acoplado a um conjunto de engrenagens que acionam a parte mecânica do sistema de posicionamento serve de motor de acionamento. A tensão disponível para esse servo-motor também varia entre 0 e +5[V].

O manual do módulo didático de controle de posição desenvolvido pela empresa Datapool® pode ser consultado em [1] e na Figura 1 é mostrada uma foto do servomecanismo ensaiado.



Figura1 – Planta real do servomecanismo ensaiado.

## II.2 Modelagem do sistema

Uma das maneiras possíveis de se modelar um servo-motor é expressar o ângulo de saída do sistema  $\theta(s)$  em função da tensão de armadura  $Ea(s)$ . Utilizando esta abordagem, encontra-se um sistema com três polos, sendo um deles na origem [2], representado na equação (1).

$$\frac{\theta(s)}{Ea(s)} = \frac{K_T}{JL_m s^3 + (BL_m + JR_m)s^2 + (BR_m + K_T K_m)s} \quad (1)$$

Na qual a indutância e a resistência de armadura são dadas por  $L_m$  e  $R_m$ , respectivamente,  $K_T$  é uma constante magnética relacionada ao torque,  $K_m$  é uma constante magnética relacionada à força contra eletromotriz,  $J$  é o momento de inércia no eixo e  $B$  é o coeficiente de atrito.

Mas se a indutância de armadura  $L_m$  for muito pequena, como no módulo em questão, ela pode ser ignorada e a função de transferência será dada por um sistema com apenas dois polos sendo um deles na origem como na equação (2):

$$\frac{\theta(s)}{Ea(s)} = \frac{K_T}{JR_m s^2 + (BR_m + K_T K_m)s} \quad (2)$$

Por tratar-se de um modelo linear, a partir de dados de entrada e saída coletados em abril de 2011 no LCPIC da Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, estimou-se os parâmetros da planta através do método numérico dos Mínimos Quadrados.

A função de transferência estimada da planta é, então, dada pela equação (3):

$$G(s) = \frac{200}{s(s + 11)} \quad (3)$$

Uma representação em variáveis de estado possível para um sistema LITDF (Linear, Invariante no Tempo e de Dimensão Finita), como o servomecanismo em questão, foi formulada por Doyle *et. al.* dando origem ao que se nomeou como planta generalizada P [3], que por definição cumpre uma série de requisitos descritos nesta mesma referência, necessários para aplicação do controle LQG. Partindo da representação dada por Doyle *et. al.*, Skogestad & Postlethwaite determinaram uma planta generalizada P [4] que compre todos os requisitos necessários para aplicação do controle LQG, esta planta é representada na equação (4):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + W^{\frac{1}{2}}w_x \\ z_x &= Q^{\frac{1}{2}}x \\ z_u &= R^{\frac{1}{2}}u \\ y &= Cx + V^{\frac{1}{2}}w_y \end{aligned} \quad (4)$$

O diagrama de bloco do sistema apresentado previamente é dado na Figura 2:

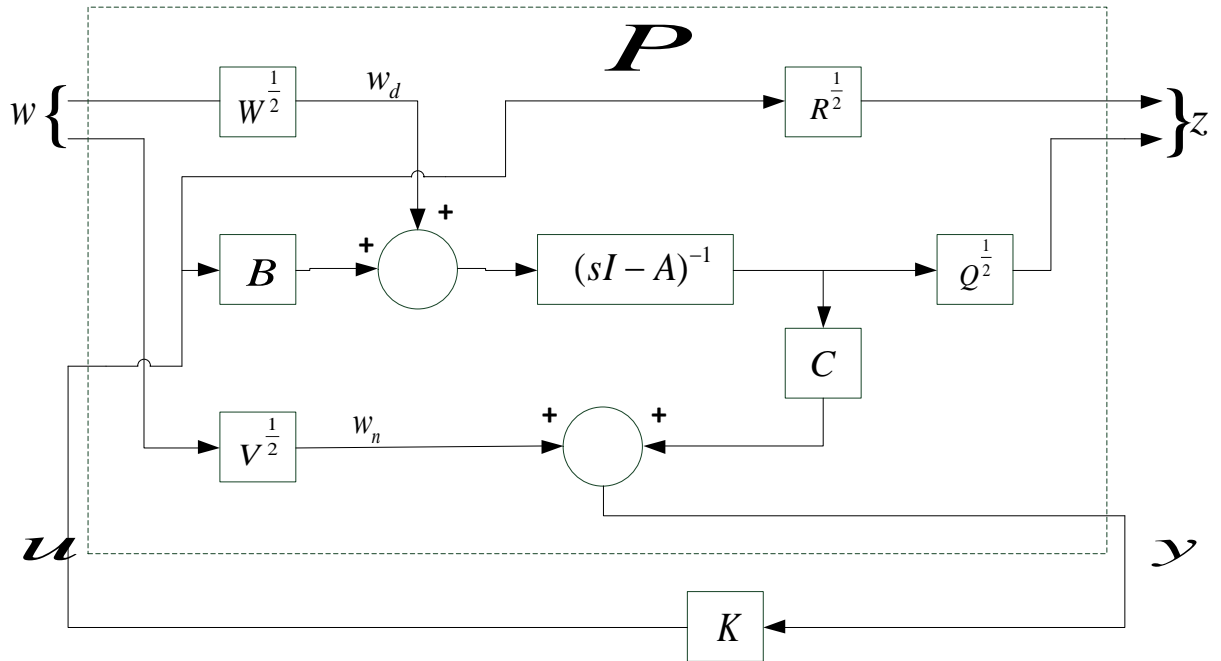


Figura 2 – Diagrama de blocos da planta generalizada P.

Para efeito de simplificação tipográfica considera-se as igualdades em (5):

$$\begin{aligned} W^{\frac{1}{2}} &= L \\ Q^{\frac{1}{2}} &= H \\ R^{\frac{1}{2}} &= \rho I \\ V^{\frac{1}{2}} &= \mu I \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, a planta generalizada P passa a ser representada por (6):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Lw_x \\ z_x &= Hx \\ z_u &= \rho Iu \\ y &= Cx + \mu Iw_y \end{aligned} \quad (6)$$

E o diagrama de blocos é apresentado na Figura (3).

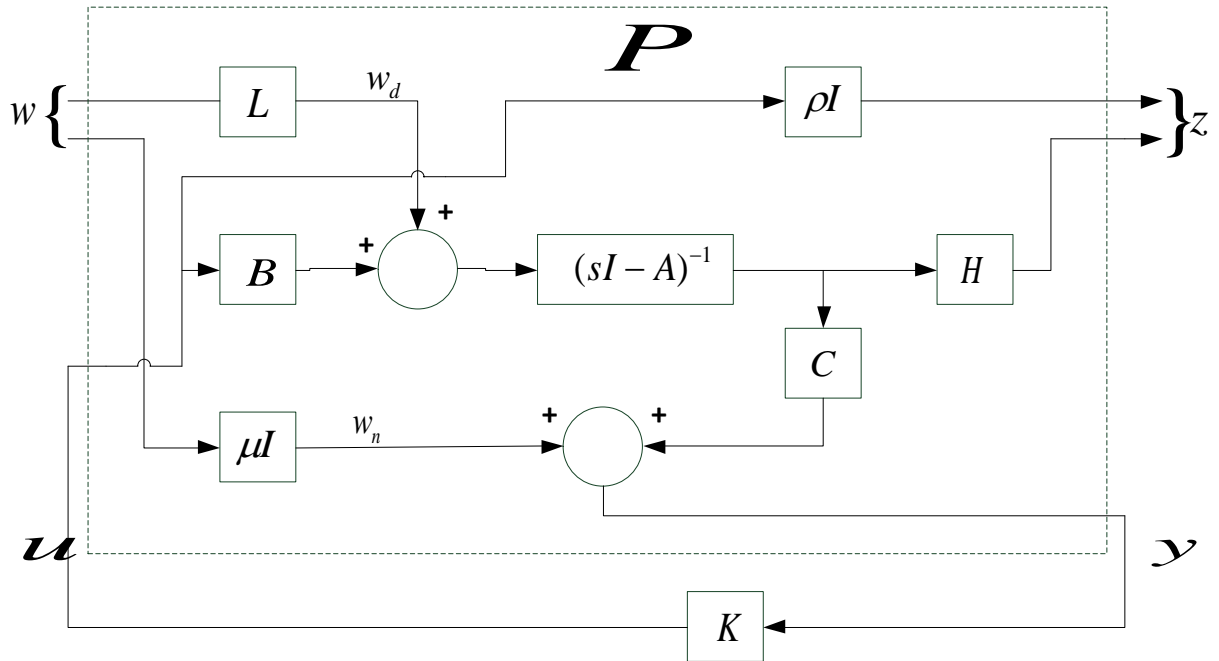


Figura 3 – Diagrama de blocos da planta generalizada  $P$  com variáveis substituídas.

Considerando uma expansão do sistema por um polo na origem dada por (7):

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [C \quad D] & \tilde{D} &= [0] \end{aligned} \quad (7)$$

O sistema passa a ser representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{L}w_x \\ z_x &= \tilde{H}x \\ z_u &= \rho Iu \\ y &= \tilde{C}x + \mu Iw_y \end{aligned} \quad (8)$$

No qual:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\tilde{C} = [0 \quad 200 \quad 0] \quad \tilde{D} = [0]$$

### III – PROJETO DO CONTROLADOR LQG/LTR

Doyle e Stein, em 1981, introduziram na literatura o método LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery*) para o projeto de controladores [5]. Este método consiste em uma técnica de controle robusto, ou seja, tolerante a grandes incertezas e distúrbios, que pode ser aplicado tanto em sistemas SISO (*Single Input – Single Output*) quanto MIMO (*Multiple Input – Multiple Output*) e visa restabelecer as margens de ganho e de fase que os reguladores LQR (*Linear Quadratic Regulators*) e o filtro de Kalman possuem individualmente mas não são garantidas quando combinados no controle LQG [6]. Portanto o *Loop Transfer Recovery* consistem em recuperar um dos componentes do controle LQG, ou seja, propriedades do observador de estados ou do regulador linear quadrático.

Com relação ao desempenho, este método cumpre todos os objetivos de um sistema real controlado enumerados por J. J. Cruz: acompanhamento de sinais de referência, rejeição de perturbações externas, insensibilidade a variações na planta e rejeição do erro de medida [7].

No sistema controlado existem sinais que devem ter sua influência neutralizada como entradas exógenas  $z$  ou variáveis auxiliares de resposta  $w$ . A matriz de transferência da malha fechada dos sinais  $w$  para  $z$  é denotada por  $T_{zw}$  cujo tamanho é medido pela norma  $H_2$  para o controlador LQG/LTR [4].

O objetivo desta metodologia é, portanto, encontrar um controlador que, baseado na informação provida por  $y$ , gere um sinal de controle  $u$  que comande a planta e neutralize a influência de  $w$  em  $z$ , através de uma minimização da matriz de  $T_{zw}$  dada pela norma  $\|T_{zw}\|_2$ .

Considere agora uma representação geral para sistemas de controle dado pelo diagrama de blocos da Figura 4.

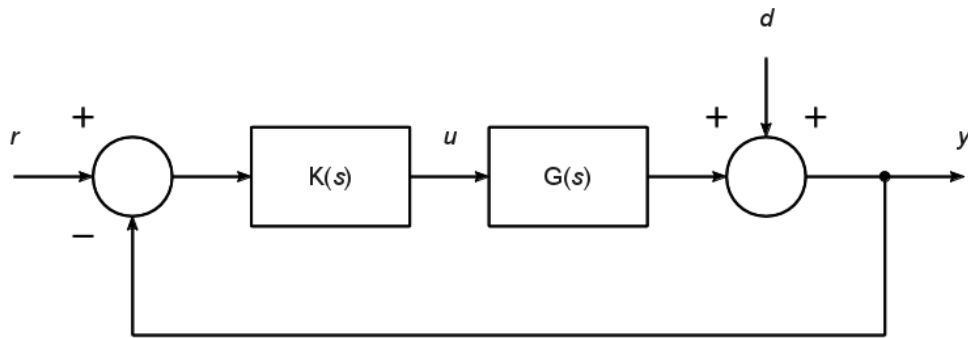


Figura 4 – Diagrama de blocos geral para sistemas de controle realimentados.

O diagrama de blocos da Figura 4 ilustra o controle proposto, no qual  $G$  é a planta de processo,  $K$  é o controlador (LQG/LTR ou  $H_\infty$ /LTR),  $r$  é o vetor de referência,  $u$  é o vetor de entrada da planta de processo,  $d$  é o vetor de distúrbio e  $y$  é o vetor de saída da planta de processo.

É usual em teoria de controle a definição de algumas funções de transferência que estão relacionadas à sensibilidade do sistema, sendo duas as utilizadas neste trabalho, a função de sensibilidade e de sensibilidade complementar que são representadas nas equações 10 e 11 respectivamente.

*Função de Sensibilidade  $S$*

$$S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (10)$$

*Função de Sensibilidade Complementar  $T$*

$$T(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (11)$$

A função de sensibilidade representa a sensibilidade do sistema ao vetor de distúrbio, ou seja, é a matriz de transferência de  $d(s)$  para  $y(s)$ . A função de sensibilidade complementar representa a sensibilidade do sistema ao vetor de referência, ou seja, é a matriz de transferência de  $r(s)$  para  $y(s)$ . Do ponto de vista prático, a função de sensibilidade complementar permite a avaliação do sistema do ponto de vista do rastreamento do sinal de referência, já a função de sensibilidade avalia o sistema do ponto de vista de rejeição a distúrbios.

Quando mais de uma função de transferência além da função  $S(s)$  é levada em consideração na formatação da malha objetivo, dá-se o nome de sensibilidade mista. A forma das funções de sensibilidade tem um impacto direto sobre o desempenho do



sistema [12]. Em baixas frequências deseja-se que os valores singulares de sensibilidade sejam pequenos, o que implica em rejeição de distúrbios, também deseja-se que os valores singulares de sensibilidade complementar sejam altos, fato que implica no acompanhamento do sinal de referência. Já para altas frequências deseja-se que o valor da sensibilidade complementar seja pequeno, assim o sistema possui a característica de rejeitar distúrbios.

### III.1 Condições para a aplicação do controle LQG/LTR

Para que a aplicação do controle LQG/LTR seja viável, a planta deve ser quadrada, ou seja, possuir a mesma quantidade de entradas e saídas e deve ser de fase-mínima. Doyle e Stein [5] justificam estas necessidades mostrando um controlador LQG, dado em (12)

$$K(s) = K_C(sI - A + BK_C + K_F C)^{-1} K_F \quad (12)$$

No qual:

$$K_C = \rho^{-2} B^T X \quad (13)$$

$$K_F = \mu^{-2} Y C^T \quad (14)$$

Sendo  $K_C$  e  $K_F$  matrizes de ganhos detalhadas na seção III.2 deste mesmo artigo. Segundo o princípio de recuperação da malha objetivo, primeiramente proposto por Doyle e Stein [5] e estudado por Stein e Athans [8], se  $\rho$  tender a 0 pela direita, a matriz  $H$  for igual à matriz  $C$  e a planta do sistema for quadrada e de fase-mínima, pode-se demonstrar que:

$$K(s) = (C(sI - A)^{-1} B)^{-1} C(sI - A) K_F \quad (15)$$

Logo:

$$G(s)K(s) = C(sI - A) K_F \quad (16)$$

Portanto, a dinâmica da função de transferência da malha do sistema tende à dinâmica filtro de Kalman (observador de estados). Pode-se dizer que houve uma recuperação da matriz de transferência da malha aberta do observador (filtro de Kalman) que como citado, possui boas propriedades de robustez. O sistema também deve ser de estados controláveis e observáveis, o que pode ser verificado a partir das matrizes de controlabilidade e observabilidade dadas em (17) e (18), respectivamente.

$$M_C = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B}] \quad (17)$$

$$M_O = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

É importante notar que a expansão por polos na origem pode modificar a controlabilidade e a observabilidade do sistema. Logo, para a planta em questão seguem as equações (19) e (20):

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ -2200 & 0 & 200 \end{bmatrix} \quad (20)$$

O sistema será de estados controláveis se o posto da matriz de controlabilidade  $M_C$  dada em (19) for igual à ordem da matriz  $\tilde{A}$ . Da mesma forma, o sistema será de estados observáveis se o posto da matriz de observabilidade  $M_O$  dada em (20) for igual à ordem da matriz  $\tilde{A}$ . Dado o exposto, pode-se afirmar que o sistema em questão é de estados controláveis e observáveis.

### III.2 Equações do controlador LQG/LTR

O objetivo da otimização LQG consiste em encontrar os ganhos matriciais  $K_C$  e  $K_F$  que minimizam a função de custo do sistema, ou seja, encontrar o controlador que

minimiza a norma  $\|T_{zw}\|_2$ . O controlador LQG, representado através de variáveis de estado, é dado pela equação (21):

$$K := \begin{bmatrix} A - BK_C - K_F C & K_F \\ K_C & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$K_C$  é a matriz de ganhos de retroação do controlador e  $K_F$  é a matriz de ganhos do observador. As matrizes  $X$  e  $Y$  são simétricas e semi-definidas positivas e representam as soluções das equações de Riccati (22) e (23) da retroação e do observador de estados, respectivamente.

$$A^T X + XA - \rho^{-2} XBB^T X + H^T H = 0 \quad (22)$$

$$YA^T + XA - \rho^{-2} XBB^T X + H^T H = 0 \quad (23)$$

Quanto menor for o parâmetro  $\rho$ , mais a dinâmica do controlador se aproximará da dinâmica do filtro de Kalman. Da mesma forma, para que o princípio de recuperação da malha ocorra, as matrizes  $H$  e  $C$  devem ser iguais. Este princípio fará com que os polos do sistema tendam aos do observador de estado [5].

Os parâmetros  $\mu$  e  $L$  são livres de projeto, ou seja, são os responsáveis pela formatação da malha objetivo em termos das funções de sensibilidade  $S(s)$  e rastreamento  $T(s)$ .

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq 1 \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq 2 \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq \mu \bar{\sigma}[(C(j\omega I - A)L)^{-1}] \quad (26)$$

Sistemas mais complexos tornariam a escolha do parâmetro  $L$  mais onerosa, mas existem técnicas para a parametrização desta matriz propostas por Athans [10].

### III.3 Parâmetros utilizados

Para a planta analisada, foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\rho = 10^{-6} \quad (27a)$$

$$H = C \quad (27b)$$

$$\mu = 4 \quad (27c)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (27d)$$

As matrizes de ganhos do controlador LQG/LTR para a planta expandida por um polo na origem são, então, dadas pelas equações (28) e (29):

$$K_C = [6,7127 \cdot 10^5 \quad 2 \cdot 10^8 \quad 1158,7] \quad (28)$$

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,10764 \\ 0,032808 \\ 1,25 \end{bmatrix} \quad (29)$$

### III.4 Simulações

Com os parâmetros especificados para o controle LQG/LTR, um programa foi desenvolvido no software MatLab® a fim de ilustrar o comportamento do sistema.

A Figura 5 ilustra a resposta ao degrau do Filtro de Kalman projetado (malha objetivo).

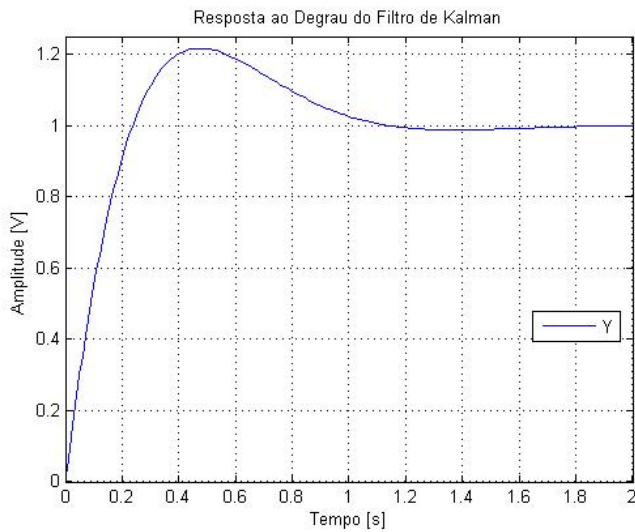


Figura 5 – Resposta ao degrau do Filtro de Kalman

A Figura 6 ilustra a resposta ao degrau do sistema controlado pelo método LQG/LTR.

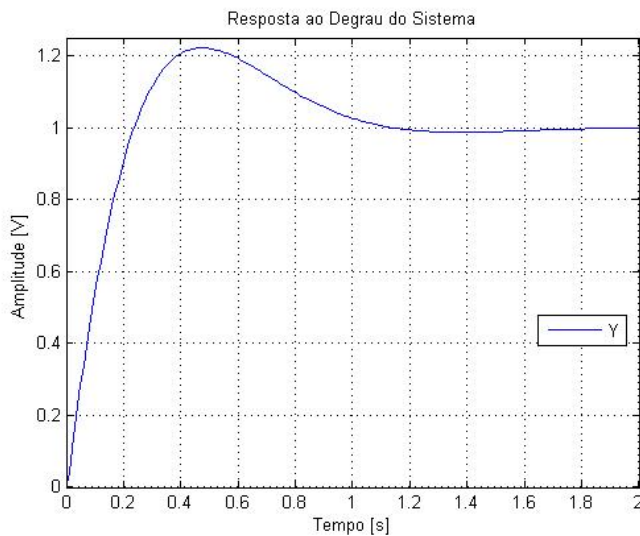


Figura 6 – Resposta ao degrau do sistema controlado pelo método LQG/LTR

A análise das Figuras 5 e 6 revela que a resposta do sistema controlado está satisfatoriamente próxima da resposta do Filtro de Kalman, o que indica que o parâmetro  $\rho$  é pequeno o suficiente. Além disso, o *overshoot* da resposta ao degrau do sistema foi em torno de 20% e o tempo de acomodação de aproximadamente 1[s].

Os gráficos da sensibilidade  $S(s)$  e do rastreamento  $T(s)$  do sistema podem ser

observados nas Figuras 7 e 8. Como desejado no problema da sensibilidade mista, em baixas frequências o sistema apresenta valores singulares de sensibilidade pequenos e valores singulares de sensibilidade complementar altos. Já para altas frequências apresenta baixos valores singulares de sensibilidade complementar.

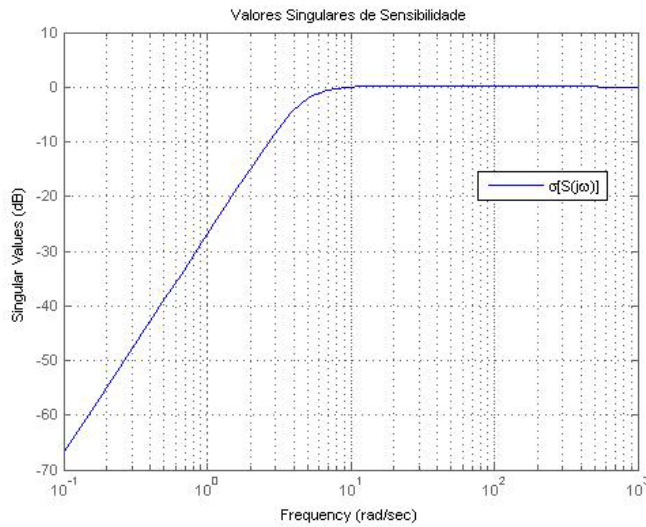


Figura 7 – Sensibilidade  $S(s)$  do sistema controlado pelo método LQG/LTR

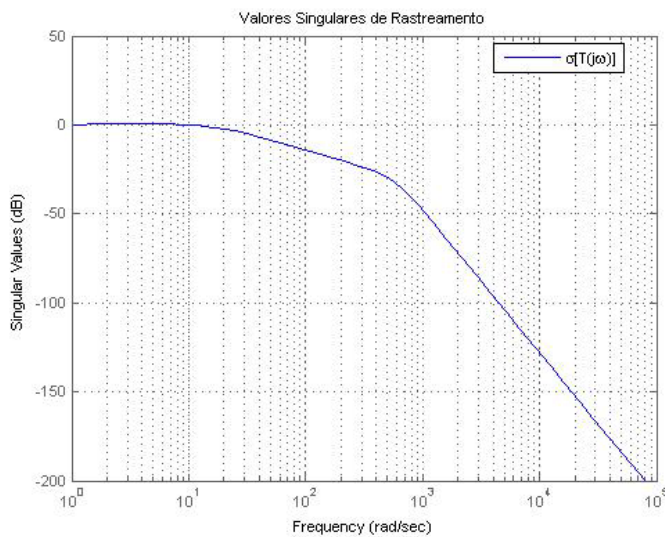


Figura 8 – Rastreamento  $T(s)$  do sistema controlado pelo método LQG/LTR

### III.5 Resultados Experimentais

Com o auxílio do software Labview®, foi desenvolvido um programa para testar

a eficácia do controlador LQG/LTR na planta real.

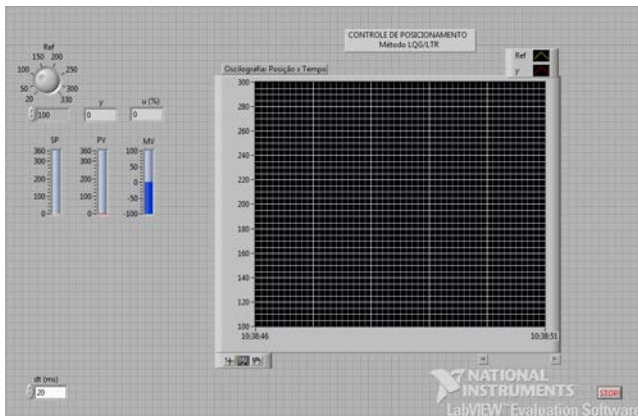


Figura 9 – Interface desenvolvida no Labview®

A Figura 10 mostra a resposta ao degrau do sistema real atrelado ao controlador LQG/LTR projetado na seção III.

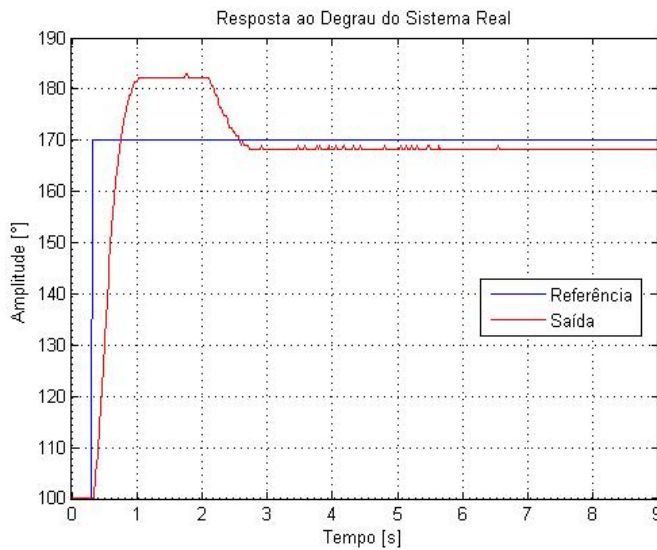


Figura 10 – Resposta ao degrau do sistema real controlado pelo método LQG/LTR

A análise da Figura 9 revela que o *overshoot* do sistema real controlado foi em torno de 17% e o tempo de acomodação 2[s]. O achatamento do gráfico nesta figura mostra que houve uma saturação do sinal de comando deixando o máximo pico abaixo do simulado. Também por este motivo, o tempo de acomodação foi maior, como pode ser observado fazendo uma comparação entre as Figuras 6 e 10. É importante ressaltar

que o servo-motor possui uma imprecisão típica em torno de  $5^\circ$ , o que justifica a diferença entre a referência e a saída na Figura 10.

#### **IV – PROJETO DO CONTROLADOR $H_\infty$ /LTR**

O método  $H_\infty$ /LTR para o projeto de controladores foi introduzido na literatura por de Paula e Ferreira em 2011 [6] a partir das equações propostas por Doyle *et. al.*[9].

Assim como o método LQG/LTR, consiste em uma técnica de controle robusto que pode ser aplicada em sistemas SISO (*Single Input – Single Output*) e MIMO (*Multiple Input – Multiple Output*) e cumpre todos os objetivos de um sistema real controlado.

Em malha fechada, existem sinais que devem ter sua influência no sistema controlado neutralizada como entradas exógenas  $z$  ou variáveis auxiliares de resposta  $w$ . Tem-se que  $T_{zw}$  é a matriz de transferência dos sinais  $w$  para  $z$  cujo tamanho é medido pela norma  $H_\infty$  para o controlador  $H_\infty$ /LTR. [6]

A problemática desta metodologia é encontrar um controlador que gere um sinal de controle  $u$  baseado na informação provida por  $y$  e neutralize a influência de  $w$  em  $z$  ao controlar o sistema, através de uma minimização da matriz de  $T_{zw}$  dada pela norma  $\|T_{zw}\|_\infty$ .

Uma propriedade fundamental na síntese de controladores via otimização  $H_\infty$ /LTR é a borda para os máximos valores singulares de rastreamento demonstrada por de Paula e Ferreira [11] que permite limitar a resposta temporal do sistema e reduzir o *overshoot*.

##### *IV.1 Condições de aplicação do controle $H_\infty$ /LTR*

Para que a aplicação do controle  $H_\infty$ /LTR seja viável, a planta deve ser quadrada, de fase-mínima e de estados controláveis e observáveis [8]. Todas essas condições já foram verificadas previamente na seção III.1 deste artigo. Além disso, o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz  $XY$  deve ser menor que  $\gamma^2$ .



#### IV.2 Equações do controlador $H_\infty$ /LTR

O controlador  $H_\infty$  dado por uma matriz de transferência em (30) minimiza as matrizes de ganho  $K_C$  e  $K_F$  e, conseqüentemente, a norma  $\|T_{ZW}\|_\infty$ .

O controlador  $K$  representado através de variáveis de estado é dado por:

$$K := \begin{bmatrix} A + \gamma^{-2}LL^T X - BK_C - ZK_F C & ZK_F \\ K_C & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Em que:

$$Z = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1} \quad (31)$$

$$K_C = \rho^{-2}B^T X \quad (32)$$

$$K_F = \mu^{-2}Y C^T \quad (33)$$

Como para o método LQG/LTR, visto na seção III,  $K_C$  é a matriz de ganhos da retroação de estados e  $K_F$  é a matriz de ganhos do observador de estados. As matrizes  $X$  e  $Y$  representam as soluções das equações de Riccati (34) e (35) do controlador e do observador, respectivamente.

$$A^T X + XA + \gamma^{-2}XLL^T X - \rho^{-2}XBB^T X + H^T H = 0 \quad (34)$$

$$YA^T + AY + \gamma^{-2}YH^T HY - \mu^{-2}Y C^T C Y + LL^T = 0 \quad (35)$$

Da mesma forma, quanto menor for o parâmetro  $\rho$ , mais a dinâmica do controlador se aproximará da dinâmica do filtro projetado. Além disso, as matrizes  $H$  e  $C$  devem ser iguais para que o princípio de recuperação da malha ocorra. A diferença no método  $H_\infty$  é a adição de um novo parâmetro de projeto,  $\gamma$ , para alcançar a malha objetivo em termos das funções de sensibilidade  $S(s)$  e rastreamento  $T(s)$ . De Paula e

Ferreira provam que quando o parâmetro  $\gamma$  tende assintoticamente a infinito, o controlador  $H_\infty$  projetado via princípio de recuperação da malha objetivo tende assintoticamente a um controlador projetado pelo método LQG via princípio de recuperação mantendo-se os demais parâmetros [11]. A malha objetivo é então formatada pelas seguintes equações:

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq 1 \quad (36)$$

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq \frac{\gamma}{\mu} \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq \mu \bar{\sigma}[(C(j\omega I - A)L)^{-1}] \quad (38)$$

#### IV.3 Parâmetros utilizados

Para a planta analisada foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\rho = 10^{-6} \quad (39a)$$

$$H = C \quad (39b)$$

$$\mu = 4 \quad (39c)$$

$$\gamma = 4,3 \quad (39d)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (39e)$$

As matrizes de ganhos do controlador  $H_\infty$ /LTRsão, então, dadaspor:

$$K_C = [6,7127 \cdot 10^5 \quad 2 \cdot 10^8 \quad 1158,7] \quad (40)$$

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,22308 \\ 0,095644 \\ 2,5313 \end{bmatrix} \quad (40)$$

#### IV.4 Simulações

Com os parâmetros especificados para o controle  $H_\infty/LTR$ , também foi desenvolvido um programa no software MatLab® a fim de ilustrar o comportamento do sistema. A Figura 11 ilustra a resposta ao degrau da malha objetivo para o controlador  $H_\infty/LTR$ .

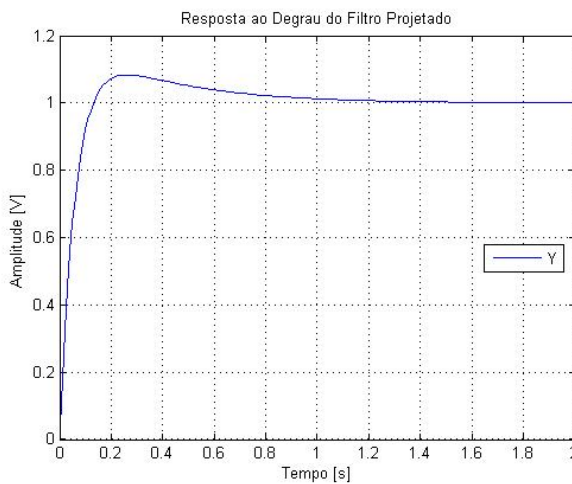


Figura 11 – Resposta ao degrau da Malha Objetivo

A Figura 12 ilustra a resposta ao degrau do sistema controlado pelo método  $H_\infty/LTR$ .

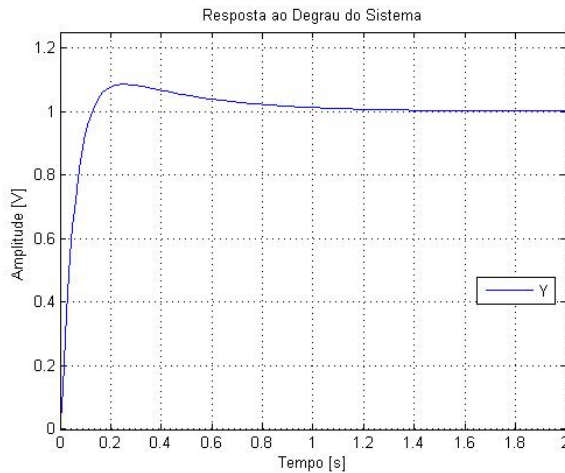


Figura 12 – Resposta ao degrau do sistema controlado pelo método  $H_{\infty}$ /LTR

Analisando as Figuras 11 e 12, observa-se que a resposta ao degrau do sistema controlado via otimização  $H_{\infty}$ /LQG tendeu à dinâmica da malha objetivo desejada.

Além disso, as características da resposta são melhores que as do sistema controlado por LQG/LTR. Os valores de *overshoot*, por exemplo, giram em torno de 10% e o tempo de resposta é de aproximadamente 0,8 [s].

Os gráficos da sensibilidade  $S(s)$  e do rastreamento  $T(s)$  do sistema podem ser observados nas Figuras 13 e 14. Assim como no caso do LQG, em baixas frequências o sistema apresenta valores singulares de sensibilidade pequenos e valores singulares de sensibilidade complementar altos. Já para altas frequências apresenta baixos valores singulares de sensibilidade complementar, cumprindo assim com as especificações de sensibilidade mista.

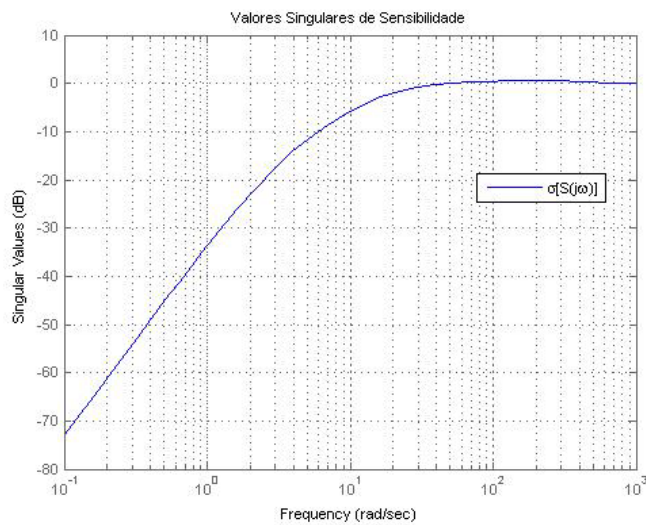


Figura 13 – Sensibilidade  $S(s)$  do sistema controlado pelo método  $H_\infty/LTR$

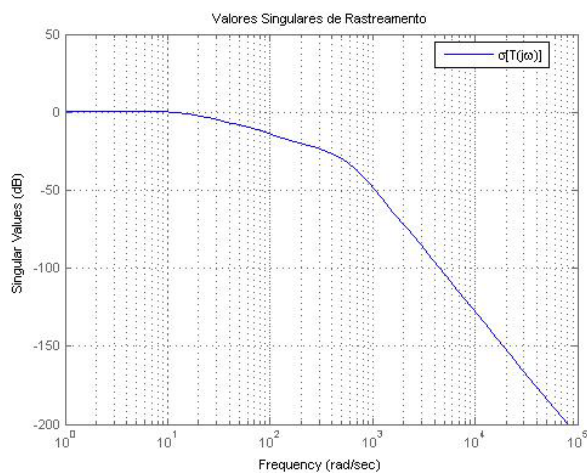


Figura 14 – Rastreamento  $T(s)$  do sistema controlado pelo método  $H_\infty/LTR$

#### IV.5 Resultados

Com o auxílio do software Labview®, foi desenvolvido um programa para testar a eficácia do controlador  $H_\infty/LTR$  na planta real.

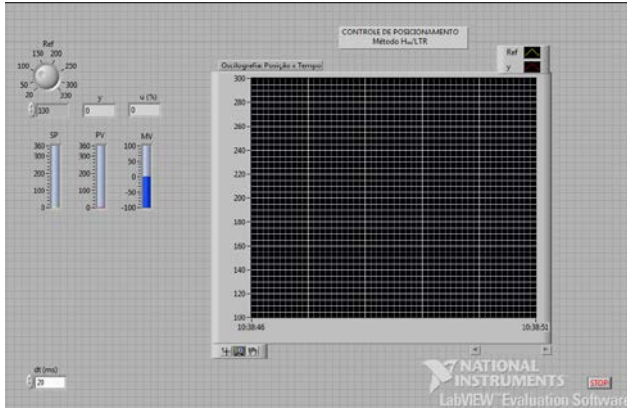


Figura 15 – Interface desenvolvida no Labview®

A Figura 16 mostra a resposta ao degrau do sistema real atrelado ao controlador  $H_{\infty}/LTR$  projetado na seção IV.

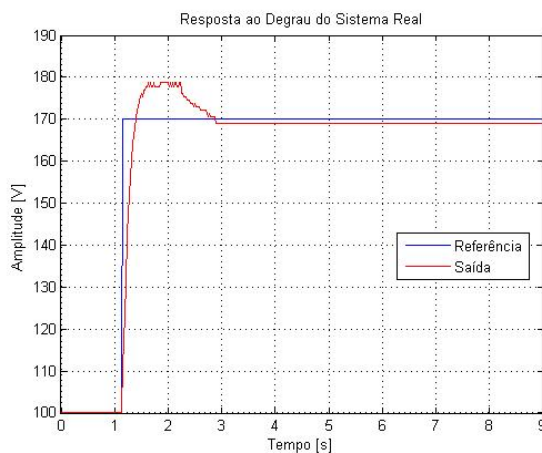


Figura 16 – Resposta ao degrau do sistema real controlado pelo método  $H_{\infty}/LTR$

A análise da Figura 16 revela que o *overshoot* do sistema real controlado foi em torno de 12% e o tempo de acomodação 1,4[s]. Assim como no controle LQG/LTR, o achatamento do gráfico mostra que houve uma saturação do sinal de comando deixando o máximo pico abaixo do simulado e o tempo de acomodação maior. Uma comparação entre as Figuras 12 e 16 ilustra bem a situação. No entanto, para os mesmos parâmetros de configuração, as respostas para o controle  $H_{\infty}/LTR$  tiveram melhores características de desempenho quando comparadas às respostas para o controle LQG/LTR. É importante ressaltar mais uma vez que o servo-motor possui uma imprecisão típica em torno de 5°, o que justifica a diferença entre a referência e a saída na Figura 16.

## V – CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto o estudo e a comparação de duas técnicas de controle robusto factíveis para sistemas SISO e MIMO desde que a planta obedeça a certas condições. Ambas mostraram-se adequadas no projeto de controladores para o módulo de controle de posição.

As simulações no Matlab® do controlador LQG/LTR e do controlador  $H_\infty$ /LTR apresentaram os resultados esperados na síntese do projeto e foram confirmadas pelos ensaios realizados na planta real com o programa Labview® apesar da saturação do sinal.

No entanto, o controlador  $H_\infty$ /LTR apresentou melhores resultados uma vez que possui o  $\gamma$ , um parâmetro livre adicional que pode ser considerado mais uma ferramenta no controle do *overshoot*.

## Agradecimentos

Nossos agradecimentos à CAPES, à FAPEMIG e ao CNPq pelo suporte à pesquisa.

## Referências

- [1] Manual “Servomecanismo 2208”; Apostila de experiências e manual de manutenção e calibração. Datapool Eletrônica.
- [2] C. L. Phillips e R. D. Harbor “Feedback Control Systems”, Ed. Prentice Hall, 2000.
- [3] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar e B. A. Francis “State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems”, IEEE Trans. on Automatic Control, 1989.
- [4] Skogestad, S. and Postlethwaite, I. Multivariable feedback control - analysis and design. Wiley, Chichester, 2005. 572 pp (1996); 2nd Edition 2005.
- [5] J. C. Doyle e G. Stein “Multivariable feedback design: Concepts for a modern/classical synthesis”, IEEE Trans. on Automatic Control, 1981.
- [6] C. F. de Paula, F. H. R. Cunha e L. H. C. Ferreira “Um procedimento simplificado de

- síntese de controladores  $H_{\infty}$ /LTR para o problema de sensibilidade mista”, CBA, 2010
- [7] J. J. Cruz “Controle Robusto Multivariável”, Ed. USP, 1996.
- [8] Stein, G.; Athans, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. IEEE Transactions on Automatic Control, v.AC-32, n.2, fev.1987.
- [9] J. C. Doyle “Guaranteed Margins for LQG Regulators”, IEEE Trans. on Automatic Control, 1979.
- [10] M. Athans “A tutorial on the LQG/LTR method” Proc. American Control Conference, 1986.
- [11] C. F. de Paula e L. H. C. Ferreira “An easy-to-use  $H_{\infty}$ /LTR control solution with mixed-sensitivity properties”, IEEE Trans. on Automatic Control, 2011.
- [12] Donha, D. C. “Projeto de Sistemas de Controle Robustos Multivariáveis”, Apostila. São Apula, Brasil: Poli-USP, 2003.