

## **MÉTODO PARA ANÁLISE DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO COM MÚLTIPLAS CARACTERÍSTICAS DA QUALIDADE CORRELACIONADAS**

PAULO ROBERTO MAIA<sup>1</sup>  
ROGÉRIO SANTANA PERUCHI<sup>2</sup>  
ANDERSON PAULO DE PAIVA<sup>3</sup>  
SEBASTIÃO CARLOS DA COSTA<sup>4</sup>  
TARCÍSIO GONÇALVES DE BRITO<sup>5</sup>

### **RESUMO**

Este artigo trata de análise multivariada do sistema de medição através de estudos de repetitividade e reprodutividade do processo de medição. A principal contribuição desta pesquisa é a proposta do método Componentes Principais Ponderados (weighted principal components - WPC) para classificar sistemas de medição que medem características da qualidade correlacionadas. Além de propor um método para avaliar sistemas de medição de processos multivariados, o objetivo desta pesquisa é compará-lo aos disponíveis na literatura. Para comprovar sua eficiência será apresentado um exemplo numérico de um estudo GR&R multivariado. Os resultados das análises estatísticas mostraram que o método WPC foi tão robusto quanto o proposto por Majeske (2008) em estimar os índices de classificação do sistema de medição. Além disso, a implementação do WPC pode ser mais simples, pois não exige cálculos matriciais para estimar os índices %R&R (percentual de repetitividade e reprodutividade) e ndc (número de categorias distintas).

**Palavras-chave:** Análise de Sistema de Medição; Repetitividade e Reprodutividade; Análise de Componentes Principais.

- 
1. Paulo Roberto Maia: Aluno de Doutorado pela UNIFEI e Professor na UNIVAS;
  2. Rogério Santana Peruchi: Aluno de Pós-Doutorado pela UNIFEI;
  3. Anderson Paulo de Paiva: Professor, Orientador de Doutorado, Pesquisador 2 -CNPq, Supervisor de Pós-Doutorado em Engenharia de Produção na UNIFEI;
  4. Sebastião Carlos da Costa: Professor, Orientador de Doutorado, Pesquisador 2 -CNPq pela UNIFEI;
  5. Tarcísio Gonçalves de Brito: Aluno de Doutorado pela UNIFEI e Professor na FAEX.

## ABSTRACT

This article explores the analysis of measurement system with correlated characteristics through the study of repeatability and reproducibility. The main contribution of this research is to propose a method for multivariate analysis of a measurement system by considering the weighted principal components (WPC). To prove its efficiency, will be displayed a numerical example obtained by Majeske (2008). The proposed method is compared with classical multivariate methods. It was observed that, compared to the other methods, the WPC was more robust in estimating the assessment indices of a multivariate measurement system. Beyond that, the implementation of the WPC can be simpler because it requires no matrix calculations to estimate the %R&R indices (percentage of repeatability and reproducibility) and ndc (number of distinct categories).

**Key words:** measurement system analysis, repeatability and reproducibility, principal component analysis,

## 1 INTRODUÇÃO

Entende-se que quanto mais complexas forem as necessidades dos clientes e consumidores, mais características da qualidade (*critical-to-quality* – CTQ) serão necessárias para atingir tal expectativa, este perfil de exigência dos clientes atuais, pode conferir aos processos de manufatura o caráter multivariado. Para atender os níveis de exigência dos clientes, geralmente, usa-se uma abordagem projeto-a-projeto. Esta estratégia de melhoria da qualidade e do negócio via projetos tiveram sua origem com Joseph Juran (JURAN, 1988; MONTGOMERY e WOODALL, 2008). Seis Sigma é definido, segundo Linderman et al (2003), como um metodologia organizada e sistemática para melhoria de processos, melhoria de novos produtos e de desenvolvimento de serviços baseado em métodos científicos e estatísticos para fazer uma redução dramática nas taxas de defeito definidos pelo cliente. Durante a etapa Medir deste método estruturado é analisada a capacidade do sistema de medição em medir as CTQs que precisam ser otimizadas (HOERL, 2001; KWAK e ANBARI, 2006; MONTGOMERY et al., 2005; RAISINGHANI et al., 2005). A análise do sistema de medição realiza estudos de repetitividade e reprodutividade (*gage repeatability and reproducibility* – GR&R) para determinar se a variabilidade do sistema de medição é relativamente menor que a variabilidade do processo monitorado. Repetitividade é a variação nas medições obtidas com um instrumento de medição quando usado diversas vezes por um avaliador que mede a mesma CTQ em uma mesma peça. Reprodutividade é tipicamente definida como a variação na média das medições feitas por diferentes avaliadores usando o mesmo instrumento de medição para medir a mesma CTQ em uma mesma peça (AL-REFAIE e BATA, 2010; ERDMANN, DOES e BISGAARD, 2010).

Este artigo trata de análise multivariada do sistema de medição através de estudos de repetitividade e reprodutividade do processo de medição. Segundo Wang e Chien (2010), a literatura apresenta poucos estudos GR&R para processos de caráter multivariado. A principal contribuição desta pesquisa é a proposta de um método baseado em análise de componentes principais e estudos GR&R para classificar um sistema de medição. O método Componentes Principais Ponderados (*weighted principal components* – WPC) pondera os escores de componentes principais por seus autovalores e, em seguida, avalia o sistema de medição. Além de propor um método para avaliar sistemas de medição de processos multivariados, o

objetivo desta pesquisa é compará-lo aos disponíveis na literatura. Para comprovar sua eficiência será apresentado um exemplo numérico de um estudo GR&R multivariado. O estudo avalia quatro características da qualidade usando cinco peças, dois operadores e três réplicas. Os resultados das análises estatísticas mostraram que o método WPC foi tão robusto quanto o proposto por Majeske (2008) em estimar os índices de classificação do sistema de medição.

O restante deste artigo está estruturado como segue. O Capítulo 2 mostra como avaliar um sistema de medição usando os métodos ANOVA (*analysis of variance*), PCA (*principal component analysis*) e MANOVA (*multivariate analysis of variance*) disponíveis na literatura. O Capítulo 3 detalha como conduzir o método WPC proposto nesta pesquisa. Em seguida, no Capítulo 4, os métodos de avaliação de sistemas de medição são aplicados a um exemplo numérico. Por fim, o Capítulo 4 apresentará as principais conclusões envolvendo as análises usando os métodos multivariados ANOVA, PCA, MANOVA e WPC.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 ESTUDO GR&R UNIVARIADO BASEADO EM ANOVA

Em muitos processos envolvendo medições de produtos manufaturados para uma característica da qualidade, a variabilidade observada pode ser devido à variabilidade do próprio produto, erro de medição ou variabilidade do dispositivo de medição. Um modelo completo para um estudo GR&R com  $p$  peças,  $o$  operadores e  $r$  réplicas é constituído por (Burdick, Borror e Montgomery, 2003; Deldossi e Zappa, 2011, Peruchi, 2011):

$$CTQ = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, o; k = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

onde  $CTQ$  é a variável resposta medida,  $\mu$  é a média dos valores medidos e  $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha)$ ,  $\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta)$ ,  $\alpha\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta})$  e  $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$  são variáveis aleatórias estatisticamente independentes para peça, operador, interação e o termo de erro, respectivamente. As componentes de variância do modelo da Eq. (1) podem ser traduzidas em notação GR&R pela Eq. (2) (Senol, 2004; White and Borror, 2011). Estas componentes podem ser estimadas usando o método ANOVA. Para mais

detalhes de como estimar estes componentes de variância, ver AIAG (2010). Dois índices comuns em estudos GR&R serão usados para determinar a aceitação do sistema de medição. Recomenda-se avaliar o sistema de medição dimensionando o desvio-padrão do sistema de medição com o desvio-padrão total do processo observado. A Eq. (3) mostra como o índice %R&R (percentual de repetitividade e reprodutividade) é calculado. As diretrizes gerais para aceitação do sistema de medição estão apresentadas na Fig. 1 (AIAG, 2010; Al-Refaie e Bata, 2010; He, Wang e Cook, 2011). A Eq. (4) define o índice *ndc* (número de categorias distintas ou índice sinal-ruído, SNR), o qual é considerado uma estatística adicional para dimensionar a variabilidade do sistema de medição. Este índice indica o número de categorias em que o processo de medição pode ser dividido. Este valor deve ser maior ou igual a 5 (Li e Al-Refaie, 2008; Majeske, 2008; Woodall e Borror, 2008).

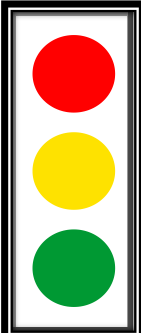
$$\sigma_{\text{Processo}}^2 = \sigma_{\alpha}^2, \quad \sigma_{\text{Repetitividade}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2, \quad \sigma_{\text{Reprodutividade}}^2 = \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$\sigma_{SM}^2 = \sigma_{\text{Repetitividade}}^2 + \sigma_{\text{Reprodutividade}}^2, \quad \sigma_T^2 = \sigma_{\text{Processo}}^2 + \sigma_{SM}^2 \quad (2)$$

$$\%R \& R = \left( \frac{\sigma_{SM}}{\sigma_T} \right) 100\% \quad (3)$$

$$ndc = \sqrt{2} \left( \frac{\sigma_{\text{Processo}}}{\sigma_{SM}} \right) \quad (4)$$

Figura 1 – Critérios de aceitação do sistema de medição.

	GR&R	Decisão	Comentário
	%R&R > 30%	Inaceitável	Esforços devem ser direcionados para melhorar o sistema de medição
	10% < %R&R < 30%	Marginal	Pode ser aceitável dependendo da aplicação, custo do instrumento de medição, custo de retrabalho ou reparo. Deve ser aprovado pelo cliente.
	%R&R < 10%	Aceitável	Recomendado especialmente quando se tenta classificar peças ou quando é requisitado um controle mais rigoroso de processo.

FONTE: Peruchi (2011)

## 2.2 ESTUDO GR&R MULTIVARIADO BASEADO EM MANOVA

De acordo com He, Wang e Cook (2011), Majeske (2008) e Wang e Chien (2010), quando um estudo GR&R considera dois fatores com interação para múltiplas características da qualidade (q características), o modelo é dado por:

$$CTQ = \begin{bmatrix} CTQ_{11} & CTQ_{12} & \dots & CTQ_{1q} \\ CTQ_{21} & CTQ_{22} & \dots & CTQ_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CTQ_{n1} & CTQ_{n2} & \dots & CTQ_{nq} \end{bmatrix} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, \rho \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (5)$$

onde  $CTQ = (CTQ_1, CTQ_2, \dots, CTQ_q)$  é a variável resposta medida,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$  são vetores constantes;  $\alpha_i \sim N(0, \Sigma_\alpha)$ ,  $\beta_j \sim N(0, \Sigma_\beta)$ ,  $\alpha\beta_{ij} \sim N(0, \Sigma_{\alpha\beta})$  e  $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$  são vetores aleatórios estatisticamente independentes um dos outros. É possível traduzir os componentes de variância da Eq. (5) em notação GR&R como variação devido ao processo ( $\Sigma_{Processo}$ ), repetitividade ( $\Sigma_{Repetitividade}$ ), reprodutividade ( $\Sigma_{Reprodutividade}$ ), sistema de medição ( $\Sigma_{SM}$ ) e variação total ( $\Sigma_T$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{Processo} &= \hat{\Sigma}_\alpha, & \hat{\Sigma}_{Repetitividade} &= \hat{\Sigma}_\varepsilon, & \hat{\Sigma}_{Reprodutividade} &= \hat{\Sigma}_\beta + \hat{\Sigma}_{\alpha\beta} \\ \hat{\Sigma}_{SM} &= \hat{\Sigma}_{Repetitividade} + \hat{\Sigma}_{Reprodutividade}, & \hat{\Sigma}_T &= \hat{\Sigma}_{Processo} + \hat{\Sigma}_{SM} \end{aligned} \quad (6)$$

Os componentes de variância da Eq. (6) podem ser estimados usando o método de análise de variância multivariada (MANOVA). Antes de estimar as matrizes variância-covariância  $\Sigma_{Processo}$ ,  $\Sigma_{SM}$  e  $\Sigma_T$  são calculadas as matrizes de médias quadráticas para os fatores peça, operador, interação peça\*operador e o termo de erro, respectivamente. Mais detalhes de como calcular estes componentes de variação usando MANOVA para estudos GR&R multivariado podem ser encontrados em Majeske (2008) e Peruchi (2011). Os índices multivariados  $\%R\&R_m$  e  $ndc_m$  são calculados através das Eqs. (7) e (8), respectivamente. Os critérios de aceitação do sistema de medição são os mesmos descritos na seção 2.1.

$$\%R \& R_m = \left( \prod_{i=1}^q \sqrt{\frac{\lambda_{SM_i}}{\lambda_{T_i}}} \right)^{1/q} 100\% \quad (7)$$

$$ndc_m = \sqrt{2} \left( \prod_{i=1}^q \sqrt{\frac{\lambda_{Processo}}{\lambda_{SM_i}}} \right)^{1/q} \quad (8)$$

### 2.3 ESTUDO GR&R MULTIVARIADO BASEADO EM PCA

Segundo Wang e Chien (2010), para tratar com múltiplas CTQs ( $q$  características) em um estudo GR&R, PCA é um método alternativo ao MANOVA proposto por Majeske (2008). O modelo que representa um estudo GR&R multivariado através de PCA é dado por:

$$\mathbf{PC}_n = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_j + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, o; k = 1, 2, \dots, r \quad (9)$$

onde  $\mathbf{PC}_n$  são os escores de componentes principais  $\mathbf{PC}_1, \mathbf{PC}_2, \dots, \mathbf{PC}_q$ . As componentes de variância dos escores de componentes principais da Eq. (9) podem ser estimadas usando o método PCA. Para mais detalhes de como obter os escores de componentes principais e como avaliar o sistema de medição usando PCA, ver Wang e Chien (2010). Os índices multivariados  $\%R\&R_m$  e  $ndc_m$  são calculados através das Eqs. (10) e (11), respectivamente. Os critérios de aceitação do sistema de medição são os mesmos descritos na seção 2.1.

$$\%R \& R_m = \left( \frac{\sigma_{SM}}{\sigma_T} \right) 100\% \quad (10)$$

$$ndc_m = \sqrt{2} \left( \frac{\sigma_{Processo}}{\sigma_{SM}} \right) \quad (11)$$

### 3. MÉTODO PROPOSTO

O método proposto neste artigo é baseado em análise de componentes principais para avaliar o sistema de medição. No entanto, diferentemente do descrito na seção 2.3, nesta proposta serão avaliados os escores ponderados das componentes principais. Este método foi chamado de Componentes Principais

Ponderados (*weighted principal components* - WPC) e está detalhado, esquematicamente, pela Fig. 2. A seguir serão descritos os passos do método.

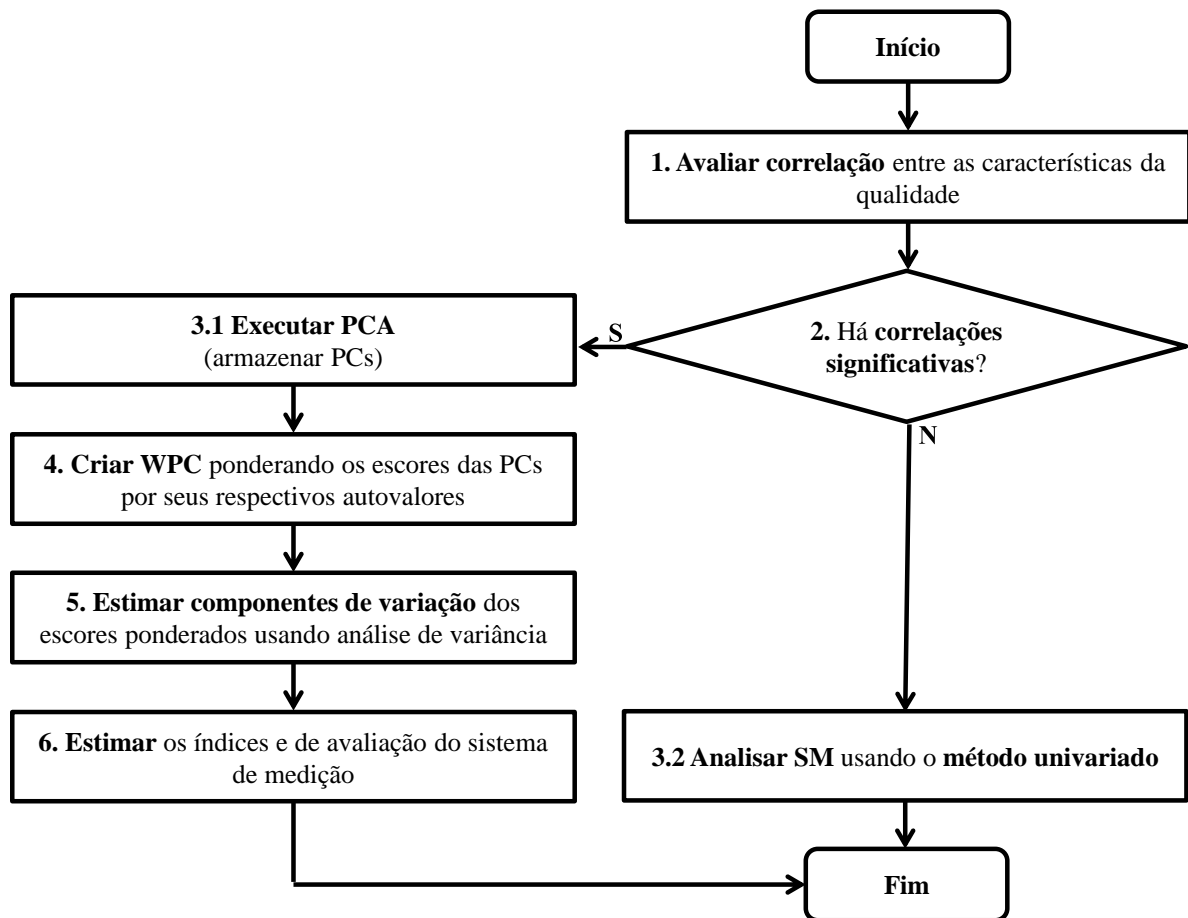
### 3.1 PASSO 1: AVALIAR CORRELAÇÃO ENTRE AS CARACTERÍSTICAS DA QUALIDADE

A correlação entre as CTQs pode ser obtida pela relação a seguir:

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \quad \forall i=1,2,\dots,q; j=1,2,\dots,q \quad (12)$$

onde  $s_{ii}$  e  $s_{jj}$  são  $i$ -ésima e  $j$ -ésima variâncias e  $s_{ij}$  representa a covariância entre as CTQs.

Figura 2 – Esquema detalhado para análise multivariada de sistemas de medição através do método WPC.





FONTE: Peruchi (2011)

### 3.2 PASSO 2: VERIFICAR SE HÁ CORRELAÇÕES SIGNIFICATIVAS

Se houverem correlações significativas entre as CTQs, seguir para o passo 3.1, o qual iniciará o processo de avaliação do sistema de medição usando o método WPC. Caso contrário, seguir para passo 3.2 e usar o método clássico da literatura.

### 3.3 PASSO 3.1: EXECUTAR ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

Executar análise de componentes principais através da Eq. (13) armazenando os escores das componentes obtidos pela Eq. (14). Análise de componentes principais é uma das ferramentas aplicadas mais amplamente usadas para resumir os padrões comuns de variação entre variáveis. As componentes principais são não correlacionadas e dependem somente da matriz de covariância  $\Sigma$  (ou da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ ) das variáveis  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_q$  e seu desenvolvimento não requer a suposição de normalidade multivariada. Os pares de autovalores-autovetores  $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), (\lambda_2, \mathbf{e}_2), \dots, (\lambda_q, \mathbf{e}_q)$ , onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q$ , da  $i$ -ésima componente principal podem ser obtidos de acordo com:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \text{Var}[\mathbf{e}_i^T \mathbf{Y}] \\ & \text{Sujeito a: } \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1 \\ & \text{Cov}[\mathbf{e}_i^T \mathbf{Y}, \mathbf{e}_k^T \mathbf{Y}] = 0, \quad k < i \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando  $\mathbf{Z}$  a matriz de dados padronizados e  $\mathbf{E}$  a matriz de autovetores do conjunto multivariado, cada escore da componente principal pode então ser obtido com (HE, WANG e COOK, 2011; JOHNSON e WICHERN, 2002):

$$\mathbf{PC}_{\text{escore}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \left( \frac{y_{11} - \bar{y}_1}{\sqrt{s_{11}}} \right) & \left( \frac{y_{12} - \bar{y}_2}{\sqrt{s_{22}}} \right) & \dots & \left( \frac{y_{1q} - \bar{y}_q}{\sqrt{s_{qq}}} \right) \\ \left( \frac{y_{21} - \bar{y}_1}{\sqrt{s_{11}}} \right) & \left( \frac{y_{22} - \bar{y}_2}{\sqrt{s_{22}}} \right) & \dots & \left( \frac{y_{2q} - \bar{y}_q}{\sqrt{s_{qq}}} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{y_{n1} - \bar{y}_1}{\sqrt{s_{11}}} \right) & \left( \frac{y_{n2} - \bar{y}_2}{\sqrt{s_{22}}} \right) & \dots & \left( \frac{y_{nq} - \bar{y}_q}{\sqrt{s_{qq}}} \right) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1q} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{q1} & e_{q2} & \dots & e_{qq} \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 3.4 PASSO 4: CRIAR O VETOR WPC

No passo 4, cria-se a resposta WPC através da ponderação dos escores de componentes principais de acordo com a Eq. (15). Esta proposta surgiu com base no trabalho de Paiva et al. (2010), que usaram uma técnica de otimização multi-objetivo baseada na ponderação das componentes principais para estudar um processo de soldagem com um conjunto de múltiplas respostas moderadamente correlacionadas.

$$\mathbf{WPC} = \sum_{i=1}^q [\lambda_i (\mathbf{PC}_i)] \quad (15)$$

onde  $\mathbf{PC}_i$  são os escores das componentes principais e  $\lambda_i$  são os respectivos autovalores. Em Johnson e Wichern (2002), verifica-se que há uma variedade de regras para estimar o número adequado de eixos de componentes principais não triviais que podem ser adotadas para representar o conjunto de dados. No entanto, devido à ponderação das componentes principais por seus respectivos autovalores, todas componentes principais podem ser incluídas no modelo. As componentes com maior autovalor terão maior importância no modelo ponderado e, apesar disso, nenhuma informação deixará de ser incluída no estudo.

### 3.5 PASSO 5: ESTIMAR COMPONENTES DE VARIÂNCIA DO ESTUDO GR&R

O modelo proposto para avaliação de um sistema de medição multivariado é:

$$\mathbf{WPC} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, o; k = 1, 2, \dots, r \quad (16)$$

onde  $\mathbf{WPC}$  é o resultado da Eq. (15);  $\mu$  é uma constante;  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\alpha\beta_{ij}$  e  $\varepsilon_{ijk}$  são variáveis aleatórias normais independentes com média zero e variância  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_\beta^2$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^2$  e  $\sigma_\varepsilon^2$ , respectivamente. As componentes de variância do modelo completo (16) são estimadas usando análise de variância, a partir das Eqs. (17)-(21).

$$\hat{\sigma}_{\text{Processo}}^2 = \hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MSP - MSPO}{or} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Repetibilidade}}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = MSE \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Reprodutividade}}^2 = \hat{\sigma}_{\beta}^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 = \frac{MSO - MSPO}{pr} + \frac{MSPO - MSE}{r} \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{SM}^2 = \hat{\sigma}_{\text{Repetitividade}}^2 + \hat{\sigma}_{\text{Reprodutividade}}^2 \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_{\text{Processo}}^2 + \hat{\sigma}_{SM}^2 \quad (21)$$

onde *MSP*, *MSO*, *MSPO* e *MSE* são, respectivamente, as médias quadráticas para o fator peça, fator operador, termo de interação e o termo de erro. Ainda no passo 5, se o termo de interação não é significativo, o modelo (16) é reduzido. Neste caso, as componentes de variância para processo, repetitividade e reprodutividade são estimadas usando Eqs. (22)-(24).

$$\hat{\sigma}_{\text{Processo}}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha}^2 = \frac{MSP - MSE}{or} \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Repetitividade}}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = MSE \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Reprodutividade}}^2 = \hat{\sigma}_{\beta}^2 = \frac{MSO - MSE}{pr} \quad (24)$$

### 3.6 PASSO 6: ESTIMAR OS ÍNDICES DE AVALIAÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO

Por fim, estimam-se os índices multivariados  $\%R\&R_m$  e  $ndc_m$  através das Eqs. (25) e (26), para classificar o sistema de medição usando os critérios de aceitação da seção 2.1.

$$\%R \& R = \left( \frac{\sigma_{SM}}{\sigma_T} \right) 100\% \quad (25)$$

$$ndc = \sqrt{2} \left( \frac{\sigma_{\text{Processo}}}{\sigma_{SM}} \right) \quad (26)$$

## 4. EXEMPLO NUMÉRICO

Para este estudo GR&R foram utilizados os dados do trabalho de Majeske (2008). Um analista da indústria automobilística construiu um dispositivo para medir quatro CTQs (as quais não foram especificadas pelo autor) de um painel automotivo

de aço laminado. Como parte do processo de desenvolvimento, eles conduziram um estudo GR&R usando  $p = 5$  peças,  $o = 2$  operadores e  $r = 3$  réplicas. A Tabela 1 contem os dados para este estudo GR&R.

#### 4.1 ANOVA

No trabalho de Majeske (2008) o analista tratou as quatro características como variáveis respostas independentes e avaliou a capacidade do sistema de medição utilizando técnicas univariadas para cada resposta. Para executar o MSA, uma análise de variância two-way com interação, Eq. (1), foi ajustada para cada variável resposta. Para as quatro respostas, o termo de interação não foi significativo para um nível de significância de 0,05. Assim, o modelo pode ser ajustado para um modelo reduzido, sem o termo de interação. Em seguida, foram estimadas as componentes de variância do estudo GR&R. As raízes quadradas destas estimativas aparecem na Tabela 2 como  $\sigma_{SM}$ ,  $\sigma_{Processo}$  e  $\sigma_T$ . Por fim, usam-se as Eqs. (3) e (4) para estimar os índices  $\%R\&R$  e  $ndc$ .

Ao analisar os resultados da Tabela 2, o analista pode se confundir quanto à conclusão que deveria ser tomada em relação ao sistema de medição. O índice  $\%R\&R$  para a resposta **CTQ<sub>4</sub>** considera que o sistema de medição é aceitável,  $\%R\&R < 10\%$ . Todavia, para as respostas **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>** e **CTQ<sub>3</sub>**, o sistema de medição é classificado como marginal,  $10\% < \%R\&R < 30\%$ .

Visto que o mesmo dispositivo de medição mede as quatro respostas, uma análise mais detalhada mostrou que CTQs apresentaram correlações significativas (Tabela 3). Logo, avaliar o sistema de medição considerando as CTQs como independentes pode não ser o mais adequado. Foi decidido avaliar as quatro respostas como um vetor e usar uma abordagem multivariada para analisar o sistema de medição.

TABELA 1 – Dados de Majeske (2008), escores das componentes principais (PC<sub>i</sub>) e escores ponderados (WPC).

i	j	k	CTQ <sub>1</sub>	CTQ <sub>2</sub>	CTQ <sub>3</sub>	CTQ <sub>4</sub>	PC <sub>1</sub>	PC <sub>2</sub>	PC <sub>3</sub>	PC <sub>4</sub>	WPC
1	1	1	-0,86	-0,40	0,44	-1,29	-0,979	-0,084	-1,152	-0,110	-3,0180
1	1	2	-0,81	-0,30	0,25	-1,10	-0,395	-0,390	-1,030	-0,162	-1,7849
1	1	3	-0,78	-0,32	0,24	-1,09	-0,349	-0,608	-0,964	-0,091	-1,8647
1	2	1	-0,78	-0,23	0,16	-1,01	-0,082	-0,580	-1,010	-0,178	-1,1645
1	2	2	-0,77	-0,33	0,21	-1,14	-0,333	-0,706	-0,921	-0,148	-1,9117

1	2	3	-0,81	-0,33	0,21	-1,16	-0,412	-0,420	-0,948	-0,261	-1,8338
2	1	1	-0,92	-0,73	-0,17	-0,01	0,180	0,802	0,490	-0,123	1,4556
2	1	2	-0,96	-0,75	-0,22	-0,03	0,149	1,081	0,557	-0,307	1,6767
2	1	3	-0,95	-0,74	-0,19	-0,07	0,110	0,995	0,498	-0,270	1,4695
2	2	1	-0,99	-0,80	-0,17	-0,08	-0,061	1,284	0,559	-0,327	1,3451
2	2	2	-0,95	-0,82	-0,17	-0,10	-0,030	0,981	0,610	-0,239	1,1321
2	2	3	-0,96	-0,77	-0,18	-0,08	0,038	1,064	0,532	-0,278	1,3663
3	1	1	-0,70	0,35	-0,83	1,38	3,594	-0,270	-0,162	0,155	8,9646
3	1	2	-0,79	0,14	-0,69	1,19	2,886	0,320	-0,050	0,065	7,7752
3	1	3	-0,73	0,23	-0,76	1,30	3,256	-0,080	-0,067	0,162	8,3201
3	2	1	-0,76	0,09	-0,63	1,09	2,731	0,063	-0,043	0,168	7,1161
3	2	2	-0,78	0,01	-0,59	1,03	2,511	0,186	0,026	0,157	6,6978
3	2	3	-0,79	-0,03	-0,58	0,99	2,409	0,243	0,069	0,129	6,5055
4	1	1	-0,66	-0,98	-0,04	-1,12	-0,553	-1,561	0,597	-0,062	-2,8322
4	1	2	-0,63	-1,02	0,03	-1,19	-0,692	-1,804	0,583	0,076	-3,4407
4	1	3	-0,62	-1,02	0,02	-1,21	-0,673	-1,887	0,594	0,070	-3,4755
4	2	1	-0,69	-1,07	0,09	-1,24	-0,964	-1,379	0,558	-0,003	-3,7199
4	2	2	-0,64	-1,07	0,10	-1,26	-0,908	-1,754	0,566	0,119	-3,9527
4	2	3	-0,71	-1,13	0,10	-1,32	-1,131	-1,267	0,620	-0,080	-4,0171
5	1	1	-0,99	-1,01	0,49	-0,82	-1,689	1,044	-0,044	0,178	-3,2993
5	1	2	-0,96	-1,00	0,52	-0,86	-1,694	0,811	-0,093	0,264	-3,5670
5	1	3	-0,98	-0,97	0,52	-0,81	-1,661	0,980	-0,142	0,245	-3,3254
5	2	1	-0,96	-1,01	0,55	-0,81	-1,717	0,835	-0,095	0,351	-3,5992
5	2	2	-1,01	-1,01	0,52	-0,79	-1,745	1,207	-0,080	0,198	-3,2896
5	2	3	-0,97	-1,04	0,55	-0,85	-1,794	0,890	-0,058	0,304	-3,7285

FONTE: Majeske (2008)

TABELA 2 – Classificação do sistema de medição usando o método ANOVA.

	CTQ <sub>1</sub>	CTQ <sub>2</sub>	CTQ <sub>3</sub>	CTQ <sub>4</sub>
$\hat{\sigma}_{SM}$	0,030641	0,079529	0,069731	0,092323
$\hat{\sigma}_{Processo}$	0,134582	0,501623	0,456680	0,993130
$\hat{\sigma}_T$	0,138026	0,507888	0,461973	0,997412
%R&R	22,20%	15,66%	15,09%	9,26%
ndc	6	8	9	15

FONTE: Próprio Autor

TABELA 3 – Análise da correlação entre as respostas **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>**.

	<b>CTQ<sub>1</sub></b>	<b>CTQ<sub>2</sub></b>	<b>CTQ<sub>3</sub></b>
<b>CTQ<sub>2</sub></b>	0,252*		
	0,178**		
<b>CTQ<sub>3</sub></b>	-0,364	-0,691	
	0,048	0,000	
<b>CTQ<sub>4</sub></b>	-0,040	0,714	-0,864
	0,832	0,000	0,000

Nota: \* Correlação de Pearson

\*\* *P-value*

#### 4.2 MANOVA

Para executar um estudo GR&R multivariado, os dados da Tabela 1 foram ajustados para uma análise multivariada de variância two-way de acordo com o modelo (5). O termo de interação não foi significativo para um nível de significância de 0,05. Dessa forma, o modelo (5) pode ser ajustado para um modelo reduzido, sem o termo de interação. As matrizes de médias quadráticas para o fator peça, fator operador e o termo de erro, foram estimadas e estão apresentadas nas Eqs. (27)-(29), respectivamente. Em seguida, as Eqs. (30)-(32) mostram as matrizes variância-covariância para processo, sistema de medição e total.

$$MSP = \begin{pmatrix} 0,1096 & 0,0972 & -0,1320 & -0,0443 \\ 0,0972 & 1,5141 & -0,9477 & 2,1329 \\ -0,1320 & -0,9477 & 1,2558 & -2,3598 \\ -0,0443 & 2,1329 & -2,3598 & 5,9246 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$MSO = \begin{pmatrix} 0,0018 & 0,0078 & -0,0043 & 0,0077 \\ 0,0078 & 0,0347 & -0,0190 & 0,0340 \\ -0,0043 & -0,0190 & 0,0105 & -0,0187 \\ 0,0077 & 0,0340 & -0,0187 & 0,0333 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$MSE = \begin{pmatrix} 0,0009 & 0,0012 & -0,0012 & 0,0015 \\ 0,0012 & 0,0043 & -0,0037 & 0,0051 \\ -0,0012 & -0,0037 & 0,0045 & -0,0049 \\ 0,0015 & 0,0051 & -0,0049 & 0,0068 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{\Sigma}_P = \begin{pmatrix} 0,01811 & 0,01600 & -0,02180 & 0,00763 \\ 0,01600 & 0,25163 & -0,15732 & 0,35463 \\ -0,02180 & -0,15732 & 0,20856 & -0,39249 \\ 0,00763 & 0,35463 & -0,39249 & 0,98631 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\hat{\Sigma}_{SM} = \begin{pmatrix} 0,00094 & 0,00168 & -0,00141 & 0,00189 \\ 0,00168 & 0,00632 & -0,00475 & 0,00702 \\ -0,00141 & -0,00475 & 0,00486 & -0,00581 \\ 0,00189 & 0,00702 & -0,00581 & 0,00852 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\hat{\Sigma}_T = \begin{pmatrix} 0,01905 & 0,01768 & -0,02321 & 0,00574 \\ 0,01768 & 0,25795 & -0,16207 & 0,36165 \\ -0,02321 & -0,16207 & 0,21342 & -0,39890 \\ 0,00574 & 0,36165 & -0,39830 & 0,99483 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Finalmente, para avaliar os índices multivariados de aceitação do sistema de medição, computam-se os autovalores das matrizes  $\Sigma_{Processo}$ ,  $\Sigma_{SM}$  e  $\Sigma_T$  que estão apresentados na Tabela 4. Usando a Eq. (7) foi obtido o índice  $\%R\&R_m=12,28\%$  que representa um dos critérios multivariado para classificação do sistema de medição para **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>**.  $10\%<\%R\&R<30\%$  determina que o sistema de medição é considerado marginal e ainda tem potencial para ser melhorado. A Eq. (8) foi usada para calcular o índice multivariado  $ndc_m=11$ , ou seja, o sistema de medição é capaz de distinguir 11 categorias distintas de peças.  $ndc_m>5$  avalia que o sistema de medição pode ser considerado aceitável.

TABELA 4 – Autovalores das matrizes  $\Sigma_{Processo}$ ,  $\Sigma_{SM}$  e  $\Sigma_T$  obtidas a partir de **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>**.

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
Peça	1,29428	0,11184	0,05438	0,00410
Sistema de medição	0,01908	0,00082	0,00050	0,00025
Variação Total	1,31119	0,11392	0,05557	0,00457

FONTE: Próprio autor

### 4.3 PCA

Primeiramente, foi feita a análise das componentes principais das respostas **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>** usando a matriz de correlação dos dados. Os autovalores e autovetores obtidos a partir da matriz de correlação estão apresentados na Tabela 5. Em seguida, os escores das componentes principais foram armazenados na Tabela 1. Wang e Chien (2010) recomendam analisar os escores de componentes principais que totalizem pelo menos 95% de explicação para as variáveis originais. Como a primeira componente principal (**PC<sub>1</sub>**) representa apenas 64,6% da variabilidade em estudo, os escores da segunda e terceira

componentes principais (**PC<sub>2</sub>** e **PC<sub>3</sub>**) também foram analisados, totalizando 99,0% da variabilidade do fenômeno estudado. Para executar um estudo GR&R multivariado, os escores **PC<sub>1</sub>**, **PC<sub>2</sub>** e **PC<sub>3</sub>** da Tabela 1 foram ajustados usando análise de variância two-way de acordo com o modelo (9).

Foram calculadas as componentes de variação para o processo, repetitividade, reprodutividade (operadores), sistema de medição e total. Em seguida, as raízes quadradas destas variâncias e, com as Eqs. (10) e (11), os índices  $%R\&R_m$  e  $ndc_m$  são apresentados na Tabela 6, para **PC<sub>1</sub>**, **PC<sub>2</sub>** e **PC<sub>3</sub>**. Os índices ( $%R\&R_m$ ;  $ndc_m$ ) foram estimados em (15,70%; 8), (18,36%; 7) e (9,60%; 14) para **PC<sub>1</sub>**, **PC<sub>2</sub>** e **PC<sub>3</sub>**, respectivamente. Neste caso específico, os índices estimados para **PC<sub>1</sub>** e **PC<sub>2</sub>** proporcionam interpretação semelhante na avaliação deste sistema de medição, ou seja, o sistema de medição é considerado marginal pelo índice  $%R\&R_m$ . A análise de **PC<sub>3</sub>** proporciona uma interpretação distinta da anterior, pois determina que o sistema de medição é aceitável.

TABELA 5 – Análise de componentes principais para **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>**

	Componentes Principais			
	<b>PC<sub>1</sub></b>	<b>PC<sub>2</sub></b>	<b>PC<sub>3</sub></b>	<b>PC<sub>4</sub></b>
Autovalores	2,5853	1,0294	0,3450	0,0403
Proporção	0,646	0,257	0,086	0,010
Cumulativo	0,646	0,904	0,990	1,000
Respostas	Autovetores			
CTQ <sub>1</sub>	0,208	-0,926	0,066	0,308
CTQ <sub>2</sub>	0,543	0,020	-0,829	-0,131
CTQ <sub>3</sub>	-0,590	0,047	-0,486	0,643
CTQ <sub>4</sub>	0,561	0,373	0,267	0,689

FONTE:Próprio Autor

TABELA 6 – Classificação do sistema de medição usando o método PCA

Fonte	<b>PC<sub>1</sub></b>		<b>PC<sub>2</sub></b>		<b>PC<sub>3</sub></b>		<b>WPC</b>	
	$\sigma$	% Var	$\sigma$	% Var	$\sigma$	% Var	$\sigma$	% Var
GR&R Total	0,277	15,70%	0,204	18,36%	0,062	9,60%	0,579	12,28%
Repetitividade	0,247	14,01%	0,202	18,13%	0,052	8,05%	0,520	11,03%
Reprodutividade	0,125	7,08%	0,032	2,89%	0,034	5,22%	0,255	5,40%
Operadores	0,125	7,08%	0,032	2,89%	0,034	5,22%	0,255	5,40%
Peça-a-peça	1,744	98,76%	1,093	98,30%	0,643	99,54%	4,678	99,24%



Varição Total	1,766	100,00%	1,112	100,00%	0,646	100,00%	4,713	100,00%
ndc	8		7		14		11	

#### 4.4 WPC

Assim como no método PCA, inicialmente, foi feita a análise das componentes principais das respostas **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>** usando a matriz de correlação dos dados. Os autovalores e autovetores obtidos a partir da matriz de correlação são os mesmos apresentados na Tabela 5. Usando a Eq. (14) obtêm-se os mesmos escores das componentes principais que estão armazenados na Tabela 1. A resposta do modelo (16) foi obtida pela ponderação das componentes principais usando Eq. (15) e armazenados na Tabela 1:

$$\mathbf{WPC} = 2,5853\mathbf{PC}_1 + 1,0294\mathbf{PC}_2 + 0,3450\mathbf{PC}_3 + 0,0403\mathbf{PC}_4 \quad (33)$$

Os resultados da Eq. (33) foram ajustados para uma análise de variância two-way, de acordo com o modelo (16). O vetor **WPC** representa o conjunto original de respostas **CTQ<sub>1</sub>**, **CTQ<sub>2</sub>**, **CTQ<sub>3</sub>** e **CTQ<sub>4</sub>**. O termo de interação não foi significativo para um nível de significância de 0,05, logo, o modelo pode ser ajustado para um modelo reduzido. Usando as Eqs. (20)-(24) foram calculadas as variâncias para processo, repetitividade, reprodutividade (operadores), sistema de medição e total. Em seguida, as raízes quadradas destas variâncias e, com as Eqs. (25) e (26), os índices  $\%R\&R_m$  e  $ndc_m$  são mostrados na Tabela 6. Assim como na análise usando o método MANOVA, foi obtido um índice  $\%R\&R_m=12,28\%$  que classifica o sistema de medição como marginal. Além disso, o índice multivariado  $ndc_m=11$  também identificou 11 categorias distintas de peças, através do método WPC.

## 5 CONCLUSÃO

A principal contribuição desta pesquisa foi a proposta de um método baseado em análise de componentes principais e estudos GR&R para classificar sistemas de medição. WPC pondera os escores de componentes principais por seus autovalores e, em seguida, avalia o sistema de medição. O método proposto foi comparado aos disponíveis na literatura através de um exemplo numérico. As análises estatísticas dos resultados mostraram que:

- ANOVA pode não ser satisfatório quando as CTQs correlacionadas são medidas pelo mesmo instrumento de medição. Técnicas estatísticas multivariadas devem ser utilizadas para que uma única interpretação represente as variáveis originais;
- PCA pode ser ineficiente para casos em que a estrutura de correlação entre as respostas proporcione  $\%PC_1$  insuficiente para uma explicação adequada da variabilidade em estudo. As avaliações individuais de cada componente principal podem fornecer interpretações distintas para a classificação do sistema de medição;
- MANOVA considera toda variabilidade em estudo e providencia uma interpretação geral para o sistema de medição. No entanto, a implementação do método é bastante complexa, pois exige cálculos matriciais para estimar os índices de avaliação do sistema de medição;
- WPC proposto apresentou uma avaliação geral para o sistema de medição, assim com o método MANOVA. Além disso, a implementação do método WPC pode ser feita através de softwares estatísticos com funções específicas para análise de componentes principais e análise do sistema de medição. Isto torna WPC mais simples de ser implementado que MANOVA.

Em Peruchi (2011), o método WPC é aplicado e comparado aos métodos da literatura usando dados simulados e dados dos processos de torneamento e soldagem. As análises estatísticas dos resultados determinaram que WPC foi o mais robusto em estimar os índices de avaliação dos sistemas de medição.

## 6 REREFÊNCIAS

AL-REFAIE, A.; BATA, N. Evaluating measurement and process capabilities by GR&R with four quality measures. **Measurement**, v.43, p.842-851, 2010.

BURDICK, R.K.; BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C. A review of methods for measurement systems capability analysis. **Journal of Quality Technology**, v.35, p.342-354, 2003.

DELDOSSI, L.; ZAPPA, D. Measurement Uncertainty with Nested Mixed Effect Models. **Quality and Reliability Engineering International**, v.27, p.373-379, 2011.  
ERDMANN, T.P.; DOES, R.J.M.M.; BISGAARD, S. Quality quandaries: a gage R&R study in a hospital. **Quality Engineering**, v.22, p.46-53, 2010.

HE, S.G.; WANG, G.A.; COOK, D.F. Multivariate measurement system analysis in multisite testing: An online technique using principal component analysis. **Expert Systems with Applications**, v.38, p.14602-14608, 2011.

HOERL R.W. Six Sigma Black Belts: What Do They Need to Know?. **Journal of Quality Technology**, v.33, p.391-406, 2001.

JOHNSON, R.A.; WICHERN, D. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 5 ed. Prentice-Hall, New Jersey, 2002.

JURAN, J.M. **Juran on Planning for Quality**. New York: Free Press, 1988.

KWAK, Y.H.; ANBARI, F.T. Benefits, obstacles, and future of six sigma approach. **Technovation**, v.26, p.708-715, 2006.

LI, M.H.C.; AL-REFAIE, A. Improving wooden parts' quality by adopting DMAIC procedure. **Quality and Reliability Engineering International**, v.24, p.351-360, 2008.

LINDERMAN, K.; SCHROEDER, R.; ZAHEER, S.; CHOO, A. Six sigma: a goal theoretic perspective. **Journal of Operations Management**, v.21, p.193–203, 2003.  
MAJESKE, K.D. Approval criteria for multivariate measurement systems. **Journal of Quality Technology**, v.40, p.140-154, 2008.

MONTGOMERY, D.C.; BURDICK, R.K.; LAWSON, C.A.; MOLNAU, W.E.; ZENZEN, F.; JENNINGS, C.L.; SHAH, H.K.; SEBERT, D.M.; BOWSER, M.D.; HOLCOMB, D.R. A university-based six sigma program. **Quality and Reliability Engineering International**, v.21, p.243–248, 2005.

MONTGOMERY, D.C.; WOODALL, W.H. An Overview of Six Sigma. **International Statistical Review**, v. 76, pp. 329-346, 2008.

PAIVA, A.P.; COSTA, S.C.; PAIVA, E.J.; BALESTRASSI, P.P.; FERREIRA, J.R. Multi-objective optimization of pulsed gas metal arc welding process based on weighted principal component scores, **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v.50, p.113-125, 2010.

PERUCHI, R.S. *Método dos Componentes Principais Ponderados Aplicado em Avaliação de Sistemas de Medição com Grandezas Correlacionadas*. **Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)** – Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI, Itajubá, 2011.

RAISINGHANI, M.; ETTE, H.; PIERCE, R.; CANNON, G.; DARIPALY, P. Six sigma: concepts, tools, and applications. **Industrial Management and Data Systems**, v.105, p.491-505, 2005.

SENOL, S. Measurement system analysis using designed experiments with minimum  $\alpha$ - $\beta$  Risks and  $n$ . **Measurement**, v.36, p.131-141, 2004.

WANG, F.K.; CHIEN, T.W. Process-oriented basis representation for a multivariate gauge study. **Computers and Industrial Engineering**, v.58, p.143-150, 2010.

WHITE, T.K.; BORROR, C.M. Two-dimensional Guidelines for Measurement System Indices. **Quality and Reliability Engineering International**, v.27, p.479-487, 2011.

WOODALL, W.H.; BORROR, C.M. Some relationships between gage R&R criteria. **Quality and Reliability Engineering International**, v.24, p.99-106, 2008.